Annex 2. Transformacions geomètriques

Joan Trias Pairó

PID_00150790

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Objectius

Geometria mètrica

Es presentaran eines bàsiques instrumentals per a resoldre els problemes més bàsics de tipus mètric en geometria bidimensional i tridimensional. Els problemes de tipus mètric tenen relació amb la distància, l'apartat o la longitud d'un vector, l'angle. L'aplicació fonamental es donarà en construcció de bases adequades per l'ús en transformacions geomètriques. Al llarg de tot el mòdul treballem, sense que calgui explicitar-ho, en els espais $\mathbb{R}^2$ (bidimensional) i $\mathbb{R}^3$ (tridimensional).

Transformacions geomètriques 2D

Les transformacions geomètriques són una eina molt potent per a la construcció geomètrica i l'animació. En aquest apartat presentarem la formulació analítica de les més importants, les transformacions afins elementals, per a propòsits de programació. Totes aquestes transformacions estan incorporades com a funcionalitats disponibles en la gran majoria dels programes de grafisme i animació.

Transformacions geomètriques 3D

Les transformacions geomètriques tridimensionals són una eina molt potent per a la construcció geomètrica i l'animació. En aquest apartat presentarem la formulació analítica de les més importants en dimensió 3, les transformacions afins elementals, per a propòsits de programació. Totes aquestes transformacions estan incorporades com a funcionalitats disponibles en la gran majoria de programes de grafisme i animació tridimensionals.

1. Geometria mètrica

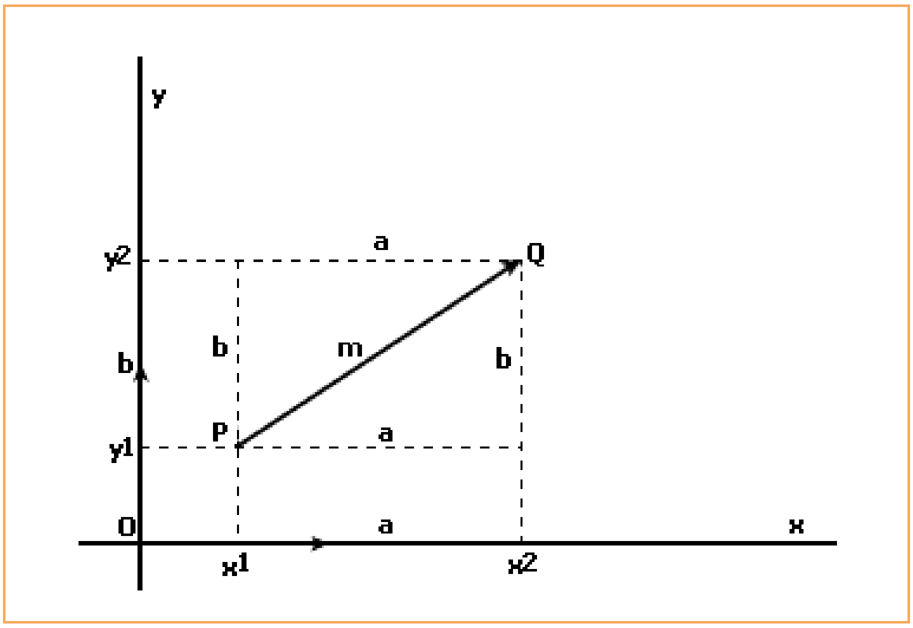
1.1. Norma d'un vector

Donat un vector *w* no nul, es defineix una **direcció** i un **sentit o orientació** de l'espai. També estem interessats en la **longitud** (o, en sentit equivalent, el **mòdul** o la **norma**).

En el cas **bidimensional**, considerant el vector $m = (a, b)$ del gràfic següent, el mòdul o longitud es pot calcular aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle corresponent:

$$\|m\| = \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Aquesta és la fórmula de la **norma** d'un vector bidimensional.



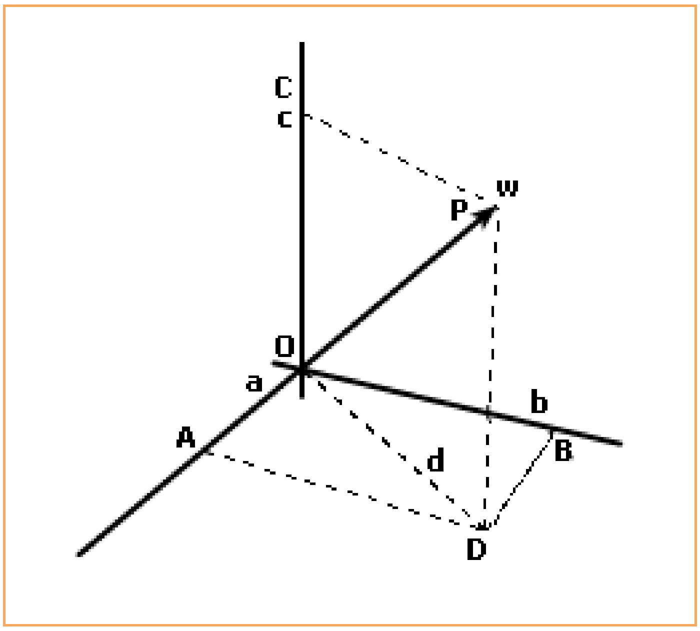
En el cas dels vectors de la base ordinària del pla $R \times R$, tenim:

$$e_1 = (1, 0); \|e_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$
$$e_2 = (1, 0); \|e_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

Observeu un exemple addicional: $\|(2, 3)\| = (\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13})$

Observeu que un vector *w* és nul si i només si la seva norma és zero.

En el cas **tridimensional**, considereu el vector $w = (a, b, c)$ (vegeu el diagrama posterior).



Considerant el triangle rectangle *OAD* (rectangle en *A*), i aplicant el teorema de Pitàgores, obtenim $OD = d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Aplicant ara el mateix teorema al triangle rectangle *ODP* (rectangle en *D*), tenim:

$$\|w\| = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Vegem quina és la norma dels vectors de la base usual de l'espai tridimensional:

$$e_1 = (1, 0, 0); \|e_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$e_2 = (0, 1, 0); \|e_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$e_3 = (0, 0, 1); \|e_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

1.1.1. Vectors unitaris i unitarització

Es diu que un vector és **unitari** si la seva norma és la unitat. Ho són, per exemple, els vectors de les bases usuals dels espais bidimensionals i tridimensionals: (1, 0), (0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

En determinades situacions en les quals tenim una direcció donada per un vector *w* no nul, només estem interessats en la direcció, però no en el mòdul o norma del vector, que resulta ser irrellevant. Llavors podem estar interessats a disposar d'un vector unitari, de norma 1, que sigui de la mateixa direcció que w, és a dir, que determini la mateixa direcció. És possible obtenir aquest vector dividint w per la seva norma $||w||$ (que és no nul·la, ja que w és no nul). Aquest procés és el **d'unitarització** del vector w:

$$w_1 = \frac{1}{\|w\|}w$$

Vegem-ne dos exemples:

$$w = (1, 1);\|w\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};w_1 = \frac{1}{\|w\|}w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u = (1, 1, 1);\|u\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3};u_1 = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

1.2. Producte escalar

El **producte escalar** de dos vectors u, v es denota amb $u \cdot v$ i es defineix de la manera següent:

En dimensió 2: $u = (a, b)$, $v = (a', b')$, $u \cdot v = aa' + bb'$

En dimensió 3: $u = (a, b, c)$, $v = (a', b', c')$, $u \cdot v = aa' + bb' + cc'$

Per exemple $(1, 2, 3) \cdot (–2, 0, 4) = 1 \cdot (–2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 10$.

Vegem quins són els productes escalars dels vectors de les bases usuals en els espais bidimensionals i tridimensionals:

$$e_1 = (1,0);e_2 = (0,1);e_1 \cdot e_2 = 1.0+0.1 = 0$$

$$e_1 = (1,0,0);e_2 = (0,1,0);e_3 = (0,0,1);e_1 \cdot e_2 = 1.0+0.1+0.0 = 0;e_1 \cdot e_3 = 0;e_2 \cdot e_3 = 0$$

És possible formular una relació entre norma i producte escalar: $\|w\| = \sqrt{w \cdot w}$

1.2.1. Distància entre dos punts

Donats els punts P, Q, la distància $d(P, Q)$ és la norma del vector PQ: $d(P, Q) = ||PQ||$.

Per aplicació del teorema de Pitàgores, es pot arribar a les fórmules finals en termes de coordenades. L'exposició d'aquestes fórmules ens obliga a un desglossament per dimensions.

En dimensió 2, si $P = (x_1,y_1),Q = (x_2,y_2)$, es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

En dimensió 3, si $P = (x_1,y_1,z_1), Q = (x_2,y_2,z_2)$, es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1.2.2. Angle

Si els vectors u, v són no nuls, i si a és l'angle que formen, tenim:

$$\cos a = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}; a = ar\cos\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

El resultat corresponent a la segona fórmula està comprès entre 0 i π. En el cas del pla, s'obté l'angle en magnitud, però sense signe; el signe d'angle **(angle amb signe)** és el signe del determinant det(u, v), si no són linealment dependents.

1.2.3. Ortogonalitat

Dos vectors són ortogonals si el seu producte escalar és nul. És a dir, u, v són ortogonals si i només si $u \cdot v = 0$. Tenint en compte la fórmula $a = ar\cos\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = ar\cos 0 = \frac{\pi}{2}$, dos vectors són ortogonals si, i només si, l'angle que formen és de 90 graus.

Els vectors de les bases usuals en l'espai bidimensional i tridimensional són ortogonals dos a dos, com hem vist anteriorment. Això significa que els angles que formen dos a dos són de 90 graus.

Rectes perpendiculars

Si u, v són els vectors directors de dues rectes, aquestes són perpendiculars si i només si els vectors u, v són ortogonals (de producte escalar $u \cdot v$ nul).

Direcció perpendicular a un pla

En moltes aplicacions resulta important disposar de la direcció perpendicular a un pla d'equació donada: imaginem que necessitem parametritzar la trajectòria d'animació d'un mòbil que parteix d'un pla i s'hi desplaça perpendicularment.

Si l'equació del pla és $ax + by + cx + d = 0$, llavors el vector $N = (a, b, c)$ és ortogonal al pla. Qualsevol recta que tingui N com a vector director és perpendicular al pla.

1.2.4. Bases ortonormals

Es diu que una **base** de l'espai vectorial és **ortonormal** si els seus vectors compleixen les dues condicions següents:

1) Tots els vectors són unitaris, és a dir, de norma o mòdul 1.

2) Els vectors de la base són ortogonals dos a dos, és a dir, de producte escalar nul.

Tal com s'ha anat veient anteriorment:

1) En l'espai bidimensional, la base $e_1 = (1{,}0); e_2 = (0{,}1)$ és una base ortonormal.

2) En l'espai tridimensional, la base $e_1 = (1{,}0{,}0); e_2 = (0{,}1{,}0); e_3 = (0{,}0{,}1)$ és una base ortonormal.

Un sistema de coordenades és cartesià si la base corresponent és una base ortonormal.

1.3. Producte vectorial

Una de les operacions de construcció de nous vectors, a partir de dos vectors donats, és l'operació del producte vectorial. S'aplica a dos vectors tridimensionals i el resultat és un nou vector tridimensional.

El producte vectorial resol el problema d'obtenir una tercera direcció perpendicular a dues direccions donades.

Suposant que estem treballant en la base ortonormal habitual, donats els vectors:

$$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$

es defineix el producte vectorial de u, v en l'ordre que s'indica com a:

$$u \wedge v = (u_2 v_3 - v_2 u_3, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

1.3.1. Propietats

Algunes de les propietats del producte vectorial són les següents:

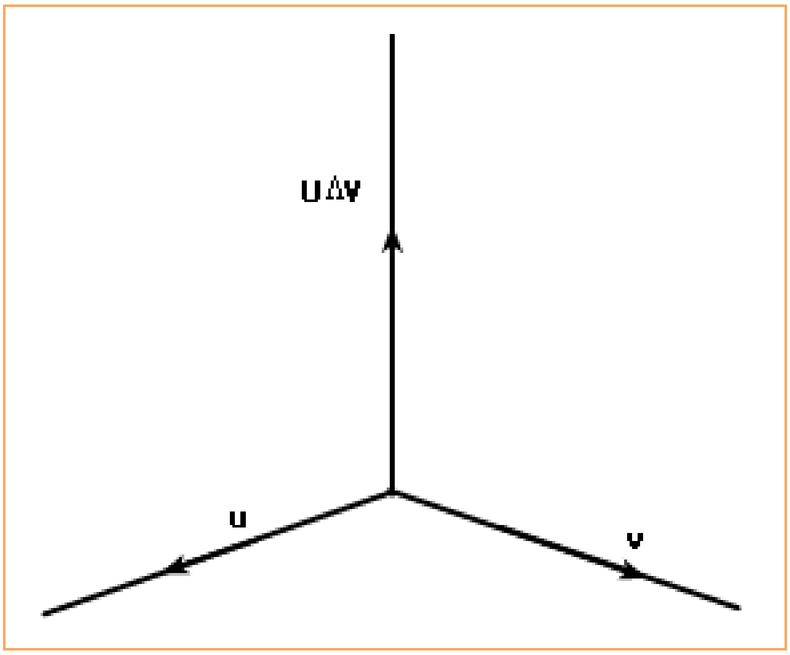
1) No és commutatiu: $u \wedge v = -v \wedge u$.

2) Dos vectors són linealment dependents si i només si el seu producte vectorial és nul.

El producte vectorial $u \wedge v$ és ortogonal als vectors u, v.

3) Si u, v són unitaris i ortogonals, el producte vectorial és unitari.

El producte vectorial de dos vectors és perpendicular a tots dos. Ara bé, com orienta el producte vectorial la direcció que determina? El gràfic següent mostra quin és el resultat. El criteri intuïtiu és el següent: si un tirabuixó gira de manera que el vector *u* se superposa sobre el vector *v* segons el menor dels angles possibles, llavors el tirabuixó avançarà en el sentit del producte vectorial.



1.4. Construcció de sistemes de coordenades cartesianes

L'ús de la capacitat de construir nous sistemes de coordenades cartesianes permetrà definir transformacions geomètriques bidimensionals i tridimensionals, que es podran utilitzar per a propòsits de construcció i animació.

1.4.1. Exemple

Vegem amb un exemple una construcció possible, en el cas tridimensional.

Considereu la recta *r* que passa per l'origen i té vector director $w = (1, 1, 1)$. Construirem un sistema de coordenades cartesianes d'orientació positiva que tingui com a tercer eix de coordenades la recta *r*, orientat per *w*, i tal que el nou origen *O*' disti 3 unitats de l'origen *O* i que estigui situat a l'octant $x,y,z \geq 0$. Hi ha més d'una solució possible.

Resposta: només donarem una de les possibles variants de solució.

Escollirem el tercer vector com el resultat de normalitzar w, de norma $\|w\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$, és a dir, $e_3{}' = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Quant al primer vector, no tenim cap classe de restricció respecte a la seva direcció a part de la de ser ortogonal a e'_3. Fàcilment podem escriure un vector ortogonal a e'_3: per exemple, $a_1{}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, que s'ha d'unitaritzar, ja que $\|a_1{}'\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Per tant $e_1{}' = \frac{1}{\|a_1{}'\|}a_1{}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Finalment, podem obtenir el segon vector pel producte vectorial dels obtinguts anteriorment, en l'ordre que convingui perquè la nova base sigui de determinant positiu (ja sortirà normalitzat, com a producte vectorial d'unitaris ortogonals):

$$e_2{}' = e_3{}' \wedge e_1{}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Col·locarem el nou origen O' sobre la recta que passa per l'origen O antic i té vector director w (per exemple). Com que e'_3 és unitari en aquesta direcció, n'hi haurà prou d'escollir, per a complir la condició de la distància (i alhora la condició d'octant), $O' = 3e_3{}' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Transformacions geomètriques 2D

2.1. Transformacions geomètriques generals 2D

Estem interessats en les transformacions geomètriques d'un cert tipus, entre les infinites tipologies de transformació possibles.

Les transformacions geomètriques que estudiarem seran les anomenades **transformacions afins**, que corresponen a l'estructura (P, P' són vectors posició):

$$P' = f(P) = AP + W$$

En l'expressió anterior A és una matriu 2×2, i W és un vector bidimensional. Es diu que AP és la **part lineal** de la transformació afí, i que W és el **vector de translació**, per motius que veurem a la secció següent.

En termes matricials,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Efectuant els càlculs matricials,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + w_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + w_2 \end{pmatrix}$$

resulta que en coordenades l'expressió és:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + w_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + w_2 \end{cases}$$

Donant contingut als diferents coeficients de les fórmules anteriors s'obtindran les transformacions concretes. En particular, les anomenades **transformacions afins elementals o bàsiques**, com es veurà a les seccions posteriors de la resta del mòdul.

A continuació estudiarem les transformacions afins elementals: translació, canvi d'escala, rotació i simetria central. La composició d'aquestes transformacions dóna lloc a transformacions més complexes, que permeten resoldre gran quantitat de problemes constructius.

2.1.1. Translacions bidimensionals

Les translacions en l'espai bidimensional corresponen a les transformacions més senzilles possibles.

Donat un vector $w = (a, b)$, es defineix la translació de vector w, i es denota T_w, com la transformació:

$$T_w(P) = P + w$$

En termes de coordenades,

$$T_w(x, y) = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

Si desglossem per coordenades, amb $P = (x, y)$ i amb $P' = (x',y)$, la transformació per la translació esmentada resultarà:

$$(x', y') = P' = T_w(P) = T_w(x, y) = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

d'on resulten les equacions de la translació

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Per exemple, si $w = (2 – 3)$, la translació corresponent és:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

També es pot expressar en termes matricials:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

La translació de vector $–w$, $T_{–w}$, és la translació inversa de la translació de vector w, T_w.

2.1.2. Canvis d'escala en el pla

Les transformacions de canvis d'escala permeten produir dilatacions o contraccions en les dimensions dels objectes segons les direccions dels eixos.

Per a això es necessitaran dos factors escalars de canvi d'escala, una per a cada eix, estrictament positius.

El canvi d'escala més senzill és el que es fa respecte a l'origen, de manera que és l'origen el **centre** del canvi d'escala.

En aquest cas, si tenim:

p: factor de canvi d'escala en la direcció de l'eix x

q: factor de canvi d'escala en la direcció de l'eix y,

la transformació corresponent serà:

$$\begin{cases} x' = px \\ y' = qy \end{cases}$$

Si, per exemple, $p = 2$, es duplicarà la dimensió segons l'eix x; si $q = 0{,}5$, es reduirà a la meitat la dimensió segons l'eix y. Si $q = 1$, no es produeix cap alteració de la dimensió en la direcció de l'eix y. Si un factor de canvi d'escala és major que 1, es produeix dilatació en la direcció de coordenades corresponent; si és menor que 1, es produeix una contracció.

Les equacions anteriors es poden expressar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matriu associada a la transformació és:

$$E_0^{p,q} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

El canvi d'escala de factors d'escala p (segons l'eix x), q (segons l'eix y) respecte del centre $C = (a, b)$, punt del pla, es defineix com la concatenació:

$$E_C^{p,q} = T_C \circ E_O^{t}$$

El lector pot obtenir les equacions en aquest cas general.

2.1.3. Girs en el pla respecte a un punt

Vegem en primer lloc l'expressió d'una **rotació respecte de l'origen de coordenades, d'angle *a***. Si a és positiu, amb l'expressió matricial següent s'obtindrà una rotació antihorària, de sentit contrari a les agulles del rellotge. No efectuem aquí la deducció del que segueix.

$$R_O^a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

Les equacions s'obtenen aplicant la matriu anterior a un vector arbitrari:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_O{}^a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos a - y\sin a \\ x\sin a + y\cos a \end{pmatrix}$$

amb la qual cosa:

$$\begin{cases} x' = x\cos a - y\sin a \\ y' = x\sin a + y\cos a \end{cases}$$

Si la rotació es dóna respecte a un punt qualsevol C, llavors cal fer la maniobra auxiliar de "reducció" o "pas" a l'origen, situació en què ja sabem resoldre el problema d'efectuar una rotació. Si l'angle de rotació es troba en y la volem antihorària (amb a positiu), llavors:

$$R_C{}^a = T_C \circ R_O{}^a \circ T_{-C}$$

L'estudiant pot obtenir les equacions finals de la transformació en termes de coordenades.

2.1.4. Simetria central en el pla

La simetria central és la simetria respecte a un punt C del pla. Aquesta transformació no és més que un cas particular de rotació, concretament un gir de 180 graus respecte a C.

L'expressió de la transformació com a concatenació de transformacions és:

$$S_C = R_C{}^{180} = T_C \circ R_O{}^{180} \circ T_{-C}$$

En coordenades, si $C = (a, b)$, resultarà:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C\left(\begin{pmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ \sin 180 & \cos 180 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}\right)\right) = T_C\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right)$$

d'on:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right) = T_C\begin{pmatrix} -x+a \\ -y+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+a \\ -y+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2a \\ -y+2b \end{pmatrix}$$

2.1.5. Transformacions afins per a construcció geomètrica

En la transformació afí general, vegem quin és el significat geomètric del vector W i dels vectors de columnes de la matriu A. Suposem que estem treballant amb la base ordinària $e_1 = (1,0)$; $e_2 = (0,1)$.

En primer lloc, observeu que $f(O) = AO + W = W$, amb la qual cosa resulta que el punt el vector posició del qual és W és el transformat de l'origen. Ja que l'efecte de sumar W és simplement el de traslladar, estudiem la part lineal $g(P) = AP$.

Si ara calculem les imatges dels vectors de la base per a la transformació corresponent a la part lineal $g(P) = AP$, obtenim:

Per al primer vector,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}1 + a_{12}0 \\ a_{21}1 + a_{22}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

S'obté, doncs, la primera columna de la matriu A. Vegem que el transformat del segon és precisament el vector de la segona columna de la matriu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}0 + a_{12}1 \\ a_{21}0 + a_{22}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Això significa que podem definir transformacions afins generals indicant:

- quins han de ser els vectors imatges o transformats dels vectors de la base;
- quin és el transformat de l'origen.

Amb el primer cas podem formular la matriu A; amb el segon, tenim el vector W.

En relació amb el primer cas normalment construirem noves bases ortonormals que siguin adequades per a la transformació que volem fer.

2.1.6. Composició de transformacions

Vegem un parell d'exemples de composició de transformacions. Convé tenir en compte que en general la composició o concatenació no és commutativa. La lectura és de dreta a esquerra segons el conveni que adoptem. El símbol $\circ$ correspon a la concatenació de transformacions.

Exemple

Escriurem les equacions del gir en el pla d'angle $\alpha = \pi/6 = 30$ graus i centre $C = (2, 3)$.

Resolució:

Suposem que hem de transformar el punt genèric del pla $P = (x, y)$; sigui $P' = (x', y)$ el transformat per la rotació indicada en l'enunciat del problema.

En no ser una rotació respecte a l'origen de coordenades, cal efectuar la maniobra que es descriu a continuació:

$$P' = (T_C R_O^{\alpha} T_{-C})P$$

Primera maniobra

En primer lloc, efectuem una translació a l'origen, de vector $-C$, és a dir, apliquem la translació $T_{-C} = T_{-(2,3)} = T_{(-2,-3)}$. Serà:

$$T_{-C}P = T_{-C}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

Amb això aconseguim reduir el problema a un de rotació equivalent, però respecte a l'origen, per al qual disposem de la expressió matricial corresponent.

Segona maniobra

Apliquem al resultat anteriorment obtingut la matriu de rotació d'angle requerit, respecte a l'origen de coordenades:

$$R_O^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Serà, per tant:

$$R_O^{\alpha}(T_{-C}(P)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha & -(y-3)\sin\alpha \\ (x-2)\sin\alpha & +(y-3)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Tercera maniobra

Es tracta de tornar a la situació inicial desfent la translació auxiliar efectuada al principi, és a dir, aplicar al resultat anterior la translació $T_c = T_{(2,\,3)}$. Resultarà, finalment:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C(R_O^{\alpha}(T_{-C}(P))) = T_C = \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha & -(y-3)\sin\alpha \\ (x-2)\sin\alpha & +(y-3)\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha & -(y-3)\sin\alpha \\ (x-2)\sin\alpha & +(y-3)\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos\alpha & -(y-3)\sin\alpha + 2 \\ (x-2)\sin\alpha & +(y-3)\cos\alpha + 3 \end{pmatrix}$$

Per tant, les equacions són:

$$\begin{cases} x' = (x-2)\cos\alpha - (y-3)\sin\alpha + 2 \\ y' = (x-2)\sin\alpha + (y-3)\cos\alpha + 3 \end{cases}$$

Ara només queda substituir *a* pel seu valor i acabar els càlculs...

La rotació és antihoràia per a angles positius.

2.1.7. Exemple

Obteniu les equacions resultants d'efectuar, en l'ordre que s'indica a continuació, les transformacions del pla següents: un gir o rotació d'angle α = 60° respecte del punt C = (1, 4) en sentit antihorari, seguida d'una translació de vector D = (6, –2).

Resolució

Heu de seguir la resolució de l'exemple anterior, ja que és essencialment la mateixa, llevat que al final cal efectuar una transformació addicional més, la translació de vector D. D'aquesta manera, seria:

$$T_D T_C R_O{}^{\alpha} T_{-C}$$

Prenem, doncs, els desenvolupaments de la resolució de l'exemple i els completem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_D T_C R_O{}^{\alpha} T_{-C}(P) = T_D \begin{pmatrix} (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 1 \\ (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 4 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 1 \\ (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 7 \\ (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

Per tant, les equacions són:

$$\begin{cases} x' = (x-1)\cos\alpha - (y-4)\sin\alpha + 7 \\ y' = (x-1)\sin\alpha + (y-4)\cos\alpha + 2 \end{cases}$$

Ara només falta substituir l'angle pel seu valor i acabar els càlculs...

3. Transformacions geomètriques 3D

3.1. Transformacions geomètriques generals 3D

En aquest apartat hi ha un gran paral·lelisme amb l'apartat dedicat a les transformacions geomètriques bidimensionals.

Estem interessats en les transformacions geomètriques d'un cert tipus, entre les infinites tipologies de transformació possibles.

Les transformacions geomètriques que estudiarem seran les anomenades transformacions afins, que corresponen a l'estructura (P, P' són vectors posició):

$$P' = f(P) = AP + W$$

En l'expressió anterior, A és una matriu 3×3, i W és un vector tridimensional. Es diu que AP és la part lineal de la transformació afí, i que W és el vector de translació, per motius que veurem a la secció següent.

En termes matricials:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Efectuant els càlculs matricials,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + w_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + w_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + w_3 \end{pmatrix}$$

resulta que en coordenades l'expressió d'una transformació afí és:

$$\begin{cases} x' = & a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + w_1 \\ y' = & a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + w_2 \\ z' = & a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + w_3 \end{cases}$$

Donant contingut als diferents coeficients de les fórmules anteriors, s'obtindran les transformacions concretes; en particular, les anomenades transformacions afins elementals o bàsiques, com es veuran a les seccions posteriors de la resta del mòdul.

Vegem-ne un exemple. La transformació següent és una transformació afí:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z + 5 \\ y' = 2x + 7y + 3z \\ z' = -3y + z + 6 \end{cases}$$

La matriu associada A i el vector de translació W són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El transformat del punt P = (1, 1, 0) s'obtindrà per simple substitució en les fórmules anteriors:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z + 5 = 1 - 1 + 0 + 5 = 5 \\ y' = 2x + 7y + 3z = 2 + 7 + 0 = 9 \\ z' = -3y + z + 6 = -3 + 0 + 6 = 3 \end{cases}$$

Amb això resulta P' = (5, 9, 3).

Estudiarem a continuació les transformacions afins elementals: translació, canvi d'escala, rotació i simetries. La composició d'aquestes transformacions dóna lloc a transformacions més complexes, que permeten resoldre gran quantitat de problemes constructius.

3.1.1. Translacions tridimensionals

Les translacions en l'espai tridimensional corresponen a les transformacions més simples possibles.

Donat un vector w = (a, b, c), es defineix la translació de vector w, i es denota T_{w}, com la transformació següent:

$$T_w(P) = P + w$$

En termes de coordenades:

$$T_w(x, y, z) = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$$

Si desglossem per coordenades, amb $P = (x, y, z)$ i $P' = (x', y', z')$, el transformat per a la translació esmentada, resultarà:

$$(x', y', z') = P' = T_w(P) = T_w(x, y, z) = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$$

d'on resulten les equacions de la translació:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Per exemple, si $w = (2, -3, 5)$, la translació corresponent és:

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \\ z' = z + 5 \end{cases}$$

També es pot expressar en termes matricials:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Correspondria a considerar les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

La translació de vector $-wT_{-w}$, és la translació inversa de la translació de vector $wT_{w'}$.

3.1.2. Canvis d'escala en l'espai tridimensional

Les transformacions de canvis d'escala permeten produir dilatacions o contraccions en les dimensions dels objectes segons les direccions dels eixos de coordenades x, y, z, separadament o independentment.

Per a això es necessitaran tres factors escalars de canvi d'escala, un per a cada eix, estrictament positius.

Canvi d'escala respecte de l'origen

El canvi d'escala més senzill és el que es fa respecte de l'origen, de manera que és l'origen el *centre* del canvi d'escala.

En aquest cas, tenim:

p: factor de canvi d'escala en la direcció de l'eix x

q: factor de canvi d'escala en la direcció de l'eix y

r: factor de canvi d'escala en la direcció de l'eix z

La transformació corresponent serà:

$$\begin{cases} x' = px \\ y' = qy \\ z' = rz \end{cases}$$

Si, per exemple, $p = 2$, es duplicarà la dimensió segons l'eix x; si $q = 0{,}5$, es reduirà a la meitat la dimensió segons l'eix y. Si $q = 1$, no es produeix cap alteració de la dimensió en la direcció de l'eix y. Si $r = 3$, la dimensió en la direcció de l'eix z es triplica. Si un factor de canvi d'escala és major que 1, es produeix dilatació en la direcció de coordenades corresponent; si és menor que 1, es produeix una contracció.

Les equacions anteriors es poden expressar matricialment:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matriu A associada a la transformació i el vector de translació són:

$$A = E_O^{p,q,r} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Canvi d'escala respecte d'un centre

El canvi d'escala de factors d'escala p (segons l'eix x), q (segons l'eix y), r (segons l'eix z) respecte del centre $C = (a, b, c)$, punt de l'espai, es defineix com la concatenació següent:

$$E_C^{p,q,r} = T_C \circ E_O^{p,q,r} \circ T_{-C}$$

Podeu obtenir les equacions en aquest cas general.

3.1.3. Rotacions en l'espai respecte d'un eix

En l'espai tridimensional, i a diferència del que ocorre en el pla bidimensional, les rotacions ho són respecte d'una recta o eix.

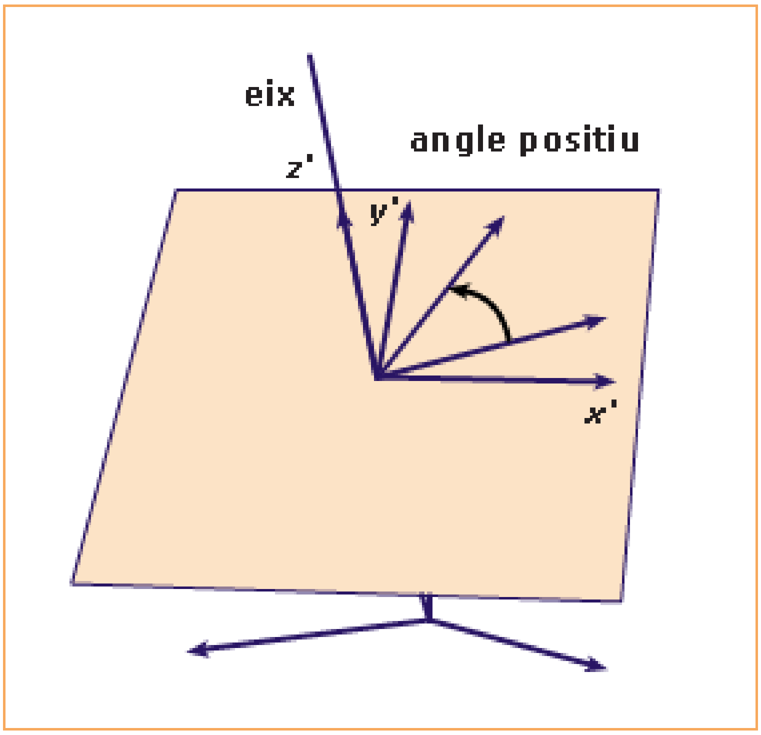
En una rotació intervenen dos ingredients:

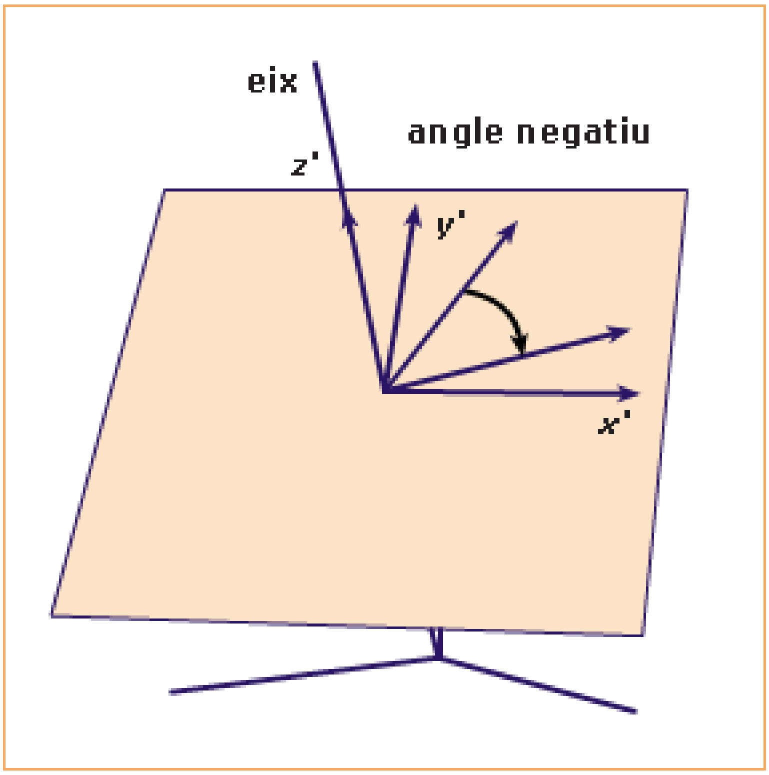
- l'angle de rotació *a*
- l'eix de rotació (recta orientada) *r*

Considereu el punt *p* no pertanyent a la recta *r*. Sigui *Q* el pla que passa per *P*, perpendicular a la recta *r*. Sigui *M* la intersecció del pla *Q* amb la recta *r*. El transformat de *P* per la rotació d'angle *a* i d'eix *r* és un punt *P*' per al qual es compleixen les propietats següents:

- *P*' pertany al pla *Q*
- distància(*P*, *M*) = distància(*P*', *M*)
- l'angle *PMP*' és *a*

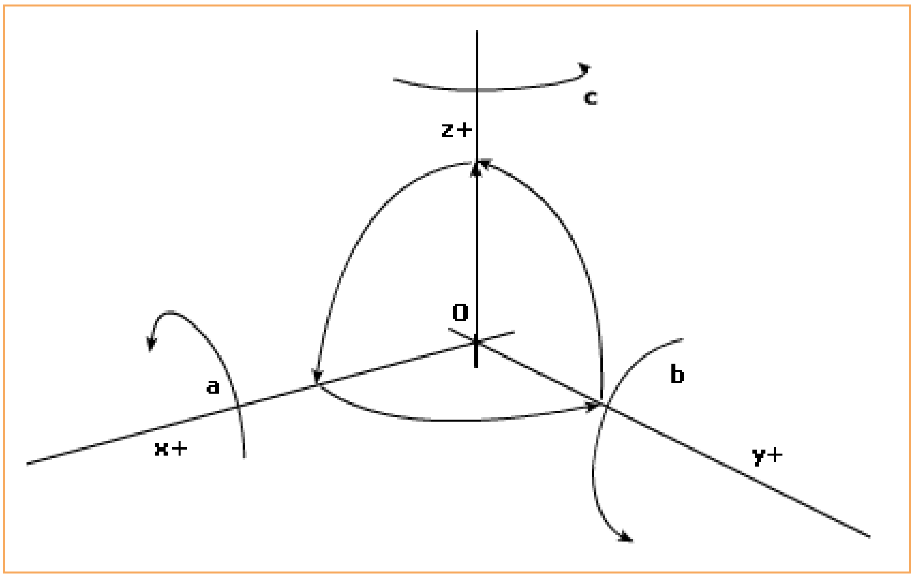
Hi ha dues solucions possibles. Per a obtenir-ne només una cal fixar un sentit de rotació. La situació s'il·lustra en els esquemes que segueixen:





Tractar les rotacions respecte de qualsevol eix a escala analítica ens allunyaria dels objectius d'aquesta publicació, i per això considerarem únicament les rotacions respecte dels eixos de coordenades del sistema de coordenades cartesianes.

- **Rotacions respecte dels eixos de coordenades**
  Considerarem les rotacions positives respecte dels eixos de coordenades. Suposant que l'angle de rotació és positiu, les rotacions relatives a un eix es veuran antihoràries, observades des del semieix positiu, sobre el pla de coordenades perpendicular a l'eix. El gràfic següent il·lustra aquesta idea.
  Per exemple, en el cas de la rotació respecte de l'eix x, una rotació de 90 graus transforma el semieix $y+$ en el semieix $z+$, i la rotació sobre el pla yz es veu com a antihorària des de $x+$.
  Anàlogament per a les rotacions respecte dels altres eixos de coordenades.



Estem interessats a veure quines equacions i quines matrius de transformació produiran l'efecte descrit anteriorment; ho descrivim a continuació.

- **Rotació positiva respecte de l'eix de coordenades *Ox* ($R_x^{\,a}$)**

  La matriu corresponent a una rotació positiva d'angle *a* respecte de l'eix *x* és:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

  Les equacions, derivades de

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ y\cos a - z\ \sin a \\ y\sin a + z\ \cos a \end{pmatrix}$$

  són:

  $$\begin{cases} x' = x \\ y' = \cos a - z\sin a \\ z' = y\sin a + z\cos a \end{cases}$$

  Amb aquestes equacions, si l'angle *a* és positiu, la rotació es veu com a antihorària (sobre el pla perpendicular a l'eix *x*, el pla *yz*, observant-la des de *z*+).

- **Rotació positiva respecte de l'eix de coordenades *Oy* ($R_y^{\,b}$)**

  La matriu de la rotació positiva d'angle *b* respecte de l'eix *Oy* és:

  $$\begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix}$$

De

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos b + z\sin b \\ y \\ -x\sin b + z\cos b \end{pmatrix}$$

deduïm les equacions de la rotació positiva respecte de l'eix y:

$$\begin{cases} x' = x\cos b + z\sin b \\ y' = y \\ z' = -x\sin b + z\cos b \end{cases}$$

- **Rotació positiva respecte de l'eix de coordenades *Oz*** (R_z^c)
  La matriu de la rotació positiva d'angle c respecte de l'eix de coordenades z+ és:

$$\begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos c - y\sin c \\ x\sin c + y\cos c \\ z \end{pmatrix}$$

escrivim les equacions corresponents:

$$\begin{cases} x' = x\cos c - y\sin c \\ y' = x\sin c + y\cos c \\ z' = z \end{cases}$$

3.1.4. Simetries en l'espai

- **Simetria axial**
  La simetria axial és la transformació de simetria respecte d'un eix. No és més que la rotació de 180 graus respecte d'aquest eix. Per tant, no és més que un cas particular de rotació en l'espai.

- **Simetria especular**
  És la simetria respecte d'un pla. La situació en la qual resultarà de més utilitat serà en el cas en el qual el pla és un pla de coordenades o paral·lel a un dels altres. Considerem les simetries respecte dels plans de coordenades. Aquesta transformació pot ser interessant per a obtenir objectes simetritzats d'un altre, amb l'estalvi de temps conseqüent. Una situació que serveixi com a exemple de la seva utilitat: imaginem que s'està desenvolupant un model amb simetria bilateral (un insecte, per exemple). Només caldrà construir determinades peces una sola vegada (la mandíbula d'una formiga, per exemple): les altres es podran obtenir per simetrització.

Simetria especular respecte del pla xy.

Si $P = (x, y, z)$ és un punt genèric de l'espai, el simètric P', simètric respecte del pla xy, serà $P' = (x, y, -z)$. Les equacions corresponents són:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

Simetria especular respecte del pla xz.

Si $P = (x, y, z)$ és un punt genèric de l'espai, el simètric P', simètric respecte del pla xz, serà $P' = (x, -y, z)$. Les equacions corresponents són:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

Simetria especular respecte del pla yz.

Si $P = (x, y, z)$ és un punt genèric de l'espai, el simètric P', simètric respecte del pla yz, serà $P' = (-x, y, z)$. Les equacions corresponents són:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

L'obtenció de les equacions de la simetria respecte d'un pla arbitrari és més complexa tècnicament i no es tractarà aquí.

3.1.5. Transformacions afins tridimensionals per a construcció geomètrica

En la transformació afí general, vegem quin és el significat geomètric del vector W i dels vectors columna de la matriu A. Suposem que estem treballant amb la base ordinària $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$.

En primer lloc, noteu que $f(O) = AO + W = W$, amb la qual cosa resulta que el punt el vector posició del qual és W és el transformat de l'origen. Ja que l'efecte de sumar W és simplement el de traslladar, estudiem la part lineal $g(P) = AP$.

Si ara calculem les imatges dels vectors de la base per a la transformació corresponent a la part lineal $g(P) = AP$, obtenim:

Per al primer vector,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}1 + a_{12}0 + a_{13}0 \\ a_{21}1 + a_{22}0 + a_{23}0 \\ a_{31}1 + a_{32}0 + a_{33}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

S'obté, doncs, la primera columna de la matriu A. Anàlogament el transformat del segon és precisament el vector de la segona columna de la matriu; el transformat del tercer vector de la base es transforma en el vector de la tercera columna de la matriu.

Això significa que podem definir transformacions afins generals indicant:

- Quins han de ser els vectors imatge o transformats dels vectors de la base.
- Quin és el transformat de l'origen.

Amb el primer podem formular la matriu A; amb el segon, tenim el vector W.

En relació amb el primer normalment construirem noves bases ortonormals que siguin adequades per a la transformació que volem fer.

Se'n poden veure diversos exemples d'ús aplicats a l'obtenció de parametritzacions de corbes i superfícies en posicions arbitràries als capítols posteriors. A més, en relació amb la construcció geomètrica amb MaxScript, al capítol de laboratori corresponent es poden veure diversos exemples d'ús de les transformacions.

Les transformacions geomètriques es poden compondre, com ja hem vist en el cas del canvi d'escala respecte d'un centre qualsevol, i en altres situacions.

Convé tenir en compte que en general la composició o concatenació no és commutativa. La lectura és de dreta a esquerra segons el conveni que adoptem. El símbol $\circ$ correspon a la concatenació de transformacions.

3.2. La projecció

El principal repte geomètric que implica representar en una pantalla d'ordinador una escena tridimensional és, naturalment, que la pantalla de l'ordinador és bidimensional. El procés pel qual representem la realitat tridimensional en dues dimensions, tenint en compte el punt de vista d'un hipotètic observador, l'anomenem **projecció**.

Per a poder fer una projecció hem de treballar en un **espai projectiu**, i no en **l'espai euclidià** en el qual ens hem mogut fins ara. En els espais projectius hem d'usar **coordenades homogènies**.

3.2.1. Coordenades homogènies

On un punt en un espai euclidià de tres dimensions es representa amb un vector tridimensional de l'estil (x, y, z), en un espai projectiu, usant coordenades homogènies, els punts es representen amb vectors de dimensió 4, de l'estil (x, y, z, w).

Diem que dos vectors (x, y, z, w) i (x', y', z', w') són **proporcionals** si existeix un nombre c tal que $x = c \cdot x'$, $y = c \cdot y'$, $z = c \cdot z'$, $w = c \cdot w'$.

En coordenades homogènies dos vectors proporcionals qualssevol representen el mateix punt. Així, per exemple, els vectors (2, 5, 7, 1), (4, 10, 14, 2) i (1, 2,5, 3,5, 0,5) denoten el mateix punt.

Donat un punt (x, y, z, w) en coordenades homogènies, la seva representació en coordenades cartesianes és (x/w, y/w, z/w). Així, el vector en coordenades homogènies (2, 5, 7, 1) correspon al vector de coordenades cartesianes (2, 5, 7), i es pot comprovar que tots els vectors que representen un mateix punt donen lloc a les mateixes coordenades cartesianes, com caldria esperar.

Com us podeu imaginar, no ens interessarà tractar el cas en què $w = 0$, ja que no es correspon amb cap punt de l'espai euclidià en el qual estem acostumats a treballar.

Per al cas en el qual treballem, el més habitual serà que fixem $w = 1$, considerant sempre vectors de l'estil (x, y, z, 1). Si trobem un vector la quarta coordenada del qual, w, sigui diferent d'1, sempre podrem dividir per w, i obtenir un vector equivalent:

$$(x/w, y/w, z/w, w/w) = (x/w, y/w, z/w, 1)$$

la quarta coordenada del qual sí que val 1.

3.2.2. Les transformacions habituals

Hem vist anteriorment quines són les matrius que representen les diferents transformacions tridimensionals en un espai euclidià. Passem a veure algunes de les matrius corresponents quan treballem en un espai projectiu; com és natural, passarem a treballar amb matrius 4×4.

Per a traslladar un punt segons el vector (x, y, z) de l'espai euclidià la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a fer una rotació d'angle α al voltant de l'eix x la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a fer una rotació d'angle β al voltant de l'eix y la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per fer una rotació d'angle γ al voltant de l'eix z la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, per a fer un escalat de factors sx, sy, sz en els eixos x, y, z, la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Aplicar la perspectiva

Si volem que la projecció obtinguda sobre la pantalla sigui realista, haurem d'aplicar la perspectiva. Així, la mida aparent dels objectes representats serà menor a mesura que s'allunyin de la càmera. Suposarem que, mitjançant la combinació adequada de les transformacions vistes fins ara, hem col·locat la càmera en l'origen de coordenades, de manera que estigui "mirant" en la direcció i sentit marcats pel semieix positiu de les z, i de manera que l'"esquerra" de la càmera la marqui el semieix positiu de les x i "dalt" estigui determinat pel semieix positiu de les y.

Per a aplicar la perspectiva, haurem d'aplicar distorsions en funció de l'angle de visió que vulguem. Definim dos angles, μ i v. μ serà l'angle definit per una recta que surt de la càmera per l'eix z i el pla que passa per la càmera i el límit dret de la pantalla. v serà l'angle definit per una recta que surt de la càmera per l'eix z i el pla que passa per la càmera i el límit superior de la pantalla.

A més, a l'hora de representar objectes en pantalla, només representarem els punts que es trobin a una certa distància de la càmera. Definirem una distància mínima, que anomenarem F, i una distància màxima, B.

La matriu que representa el cas general és:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tan\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B+F}{B-F} & \frac{-2BF}{B-F} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el cas que prenguem $B = \infty$ (és a dir, representem tots els punts per davant de la càmera a partir d'una distància mínima), considerarem la matriu:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tan\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2F \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Habitualment μ i v es determinen de manera que la representació en pantalla sembli correcta. Se solen prendre de manera que la tangent de μ estigui entre 1 i 5, i, si la pantalla sobre la qual volem fer la representació té format 4/3, prendrem v de manera que $\tan \mu = 4/3 \cdot \tan v$. Així, per exemple, en una pantalla en format 4/3 i fixant $\tan \mu = 3$, si volem representar els objectes que estiguin en una distància mínima 1 de la càmera, treballarem amb la matriu:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Activitats

Exercicis

Problema 1

Donats els punts A, B, escriviu l'expressió del punt del segment AB que dista de B un terç de la distància de A a B.

Resolució:

Considerem la parametrització $P(t) = A + t(B - A)$. El punt M buscat es descriu de manera equivalent com el que dista de A dos terços de la longitud AB. N'hi haurà prou d'elegir t = 2/3 en la parametrització anterior, de manera que resulta $M = A + (2/3)\ (B - A)$.

També podem escriure una altra variant, $Q(t) = B + s\ (B - A)$. Llavors cal prendre $s = 1/3$ per a obtenir el punt M buscat.

Problema 2

Donats els punts P, Q, escriviu l'expressió del punt del segment PQ que dista de P una quarta part de la distància de P a Q.

Resolució:

La parametrització del segment és $T(t) = P + t\ (Q - P)$, amb $0 \leq t \leq 1$. Obtenim el punt demanat amb $t = 1/4$. Així, $M = T\ (1/4) = P + (1/4)\ (Q - P)$.

Problema 3

Un punt animat parteix de $A = (0, 1, 1)$ i es desplaça sobre el pla vertical yz al quadrant de coordenades no negatives $y \geq 0, z \geq 0$, de manera que s'allunya de l'origen segons una trajectòria rectilínia que forma un angle de 30 graus amb el semieix y+. Es deté quan ha recorregut 200 unitats. Parametritzeu la trajectòria.

Resolució:

Si w és un vector director de la recta que és la base de la trajectòria, llavors es parametritza amb $P(t) = A + tw$, amb $t \geq 0$. Cal obtenir un vector que, a part de donar-nos la direcció de la trajectòria, orienti la recta segons la condició de l'enunciat sobre la seva progressió al quadrant y+z+, allunyant-se de l'origen. A més, atenent a la condició del recorregut de 200 unitats, resultarà còmode que el vector sigui unitari, és a dir, de norma o mòdul 1 (en cas que el vector que s'obtingui no ho sigui, unitaritzarem dividint per la norma o mòdul).

El vector $w = (0, \cos 30, \sin 30)$ satisfà tots els requisits. La trajectòria que s'inicia en A es pot parametritzar amb $P(t) = A + tw$, amb t positiva o nul·la. El punt final B s'obtindrà amb el valor t adequat del paràmetre, de manera que s'hagin recorregut 200 unitats. Si w és unitari, n'hi ha prou d'elegir $t = 200$, és a dir, $B = P(200) = A + 200w$.

Així doncs, cal parametritzar el segment AB:$Q(s) = A + s(B - \mathrm{A}) = A + 200sw$, amb $0 \leq t \leq 1$. Concretant,

$$\begin{aligned} Q(s) &= (0, 1, 1) + s(0, 200\cos 30, 200\sin 30) = (0, 1 + 200\cos 30s, 1 + 200\mathrm{s} \\ &= ((0, 1 + s100, 1 + s100\sqrt{3}), con(0 \leq t \leq 1)) \end{aligned}$$

També s'hauria pogut trobar directament un vector director o de mòdul 200, concretament $u = (0, 200 \cos 30, 200 \sin 30)$. En aquest cas, $B = A + u$. El resultat final és el mateix: $G(r) = A + r(B - A) = A + ru$.

Problema 4

Considereu el triangle ABC, amb $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 3)$. I sigui $M = (1, 1, 1)$, punt del pla determinat per aquests tres punts. Un punt animat parteix de M, s'allunya de l'origen i es mou segons una trajectòria perpendicular al pla ABC fins a recórrer 300 unitats. Parametritzeu la trajectòria d'animació.

Resolució:

La principal dificultat és obtenir una direcció (un vector w) perpendicular al pla ABC. El pla ABC divideix l'espai en dos semiespais, uns dels quals conté l'origen de coordenades. Ja que s'ha de complir la condició d'allunyament de l'origen, haurem d'elegir w de manera que "apunti cap al semiespai que no contingui l'origen".

El procediment estàndard per a obtenir una direcció perpendicular a dues direccions donades és el producte vectorial. Elegim dos vectors no alineats del pla ABC: el més còmode és fer-ho a partir dels punts dels quals disposem de les coordenades. Siguin:

$u_1 = AB = B - A = (0,3,0) - (3,0,0) = (-3,3,0)$
$u_2 = AC = C - A = (0,0,3) - (3,0,0) = (-3,0,3)$

Calculem $w_1 = u_1 \wedge u_2 = (9,9,9)$. L'orientació de la direcció que determina és la requerida.

Ja que cal recórrer una distància en la direcció donada pel vector anterior, és convenient unitaritzar, és a dir, dividir per la norma, que és $\|w\| = (\sqrt{9^2+9^2+9^2} = 9\sqrt{3})$. Així, finalment $w = \frac{1}{\|w_1\|}w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

El final del recorregut serà $F = M + 300w$. Per tant, la parametrització de la trajectòria és:

$$P(t) = M + t(F-M) = M + t300w = (1, 1, 1) + t\left(\frac{300}{\sqrt{3}},\frac{300}{\sqrt{3}},\frac{300}{\sqrt{3}}\right), 0 \le t \le 1$$

Problema 5

Donats els punts A, B de l'espai, escriviu l'expressió del punt C del segment AB que dista de A un terç de la longitud del segment AB. Raoneu la resposta.

Resolució:

$C = A + (1/3)\ (B - \mathrm{A})$.

Els punts del segment AB són de la forma $P(t) = A + t(B - \mathrm{A})$, amb t que varia entre 0 i 1. El punt C és el que correspon al paràmetre $t = 1/3$. Ho justificarem en termes de distància. Imposem la propietat de l'enunciat: $(1/3)d(A, B) = d(A, P(t))$. Per tant,

$(1/3)d(A, B) = d(A, P(t)) = ||P(t)- A|| = ||A + t(B - A) - A|| = ||t(B - A)|| = |t|\ ||B - A|| = td(A, B)$. Ha de ser, per tant, $t = 1/3$.

Problema 6

En l'espai tridimensional, l'equació $y = x$ és l'equació d'un pla perpendicular al pla horitzontal $z = 0$. Cert o fals? Raoneu la resposta.

Resolució:

Cert. L'equació $y = x$ correspon al pla perpendicular a $z = 0$ que talla aquest pla segons la bisectriu del primer quadrant. La resposta es pot esbrinar calculant vectors normals als plans indicats i comprovant que són ortogonals, és a dir, de producte escalar nul. Ara bé, recordeu que si $ax + by + cz + d = 0$, llavors $N = (a, b, c)$ és un vector perpendicular al pla. Reescrivint el pla $y = x$ en aquesta forma, és a dir, com a $1 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \cdot z + 0 = 0$, resulta que $N = (1, -1, 0)$ és un vector normal al pla. Quant al pla $z = 0$, $N' = (0, 0, 1)$ és normal al pla horitzontal $z = 0$. Vegem que el seu producte escalar és nul:

$N \cdot N' = (1, -1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$. Per tant, els plans respectius són perpendiculars.

Problema 7

Donat el pla determinat pels punts $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, construïu un nou sistema de coordenades d'acord amb la descripció següent:

- El nou origen O' ha de ser el baricentre de A, B, C.
- El segon eix del nou sistema ha de ser perpendicular al pla determinat per A, B, C, orientat positivament cap al semiespai que conté l'origen O del sistema de coordenades usual, sistema en el qual hi ha expressats els punts A, B, C.
- El nou sistema de coordenades ha de ser de coordenades cartesianes.

Els detalls que quedin sense especificar queden al lliure criteri de l'estudiant, que haurà de descriure les decisions que prengui.

Mostreu tots els passos de la construcció.

Problema 8

Escriviu el vector director de la recta del pla $z = 0$, que passa per l'origen de coordenades, tal que el seu angle d'inclinació (amb l'eix $Ox+$) és de 30 graus.

Resolució:

Hi ha més d'una possibilitat. Si es pren unitari d'entrada, serà:

$w = (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6), 0)$.

També es podria prendre qualsevol múltiple escalar no nul d'aquest.

Problema 9

Donada la recta que passa per A i és de vector director v, doneu el punt que dista n unitats de A segons la direcció del vector v.

Resolució:

Parametritzem utilitzant un vector unitari $P(t) = A + t\frac{v}{\|v\|}$. N'hi haurà prou de prendre $t = n$, és a dir, $P(n)$.

Problema 10

Quina forma tenen els vectors que són ortogonals a $w = (1, 1, 1)$?

Resolució:

Sigui $v = (a, b, c)$ un vector ortogonal a w. Aquest fet equival que sigui nul el producte escalar de tots dos. Per tant: $0 = v \cdot w = (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = a + b + c$. Per tant, són de la forma $v = (a, b, c) = (a, b, -a - b)$, amb a, b qualssevol.

Problema 11

Donada la recta r que passa pel punt $A = (1, 2, 0)$ i té direcció donada pel vector $v = (1, 1, 1)$, construïu un nou sistema de coordenades cartesianes que tingui com a eix z' (tercer eix de coordenades) la recta donada, però orientada en sentit oposat al de l'orientació donat pel vector v. El nou sistema ha de ser d'orientació positiva.

Resolució:

El nou sistema de coordenades serà $S' = (A;\{\vec{u}_1\vec{u}_2, \vec{u}_3\})$. Presentarem una resolució esquemàtica; el lector suplirà els detalls de càlculs intermedis com ara el càlcul de normes o els productes vectorials.

En primer lloc, tenim $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$, amb la qual cosa podem elegir $\vec{u}_3 = -\frac{1}{\|v\|}\vec{v} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Obtindrem ara una direcció ortogonal al vector anterior, efectuant el producte vectorial amb un altre vector que no determini la mateixa direcció, com per exemple $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Sigui $\vec{v}_1 = \vec{e}_3 \wedge \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$. La seva norma és $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, i ara podem unitaritzar: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Aconseguirem una tercera direcció ortogonal a les dues anteriors (i ja unitaritzada) mitjançant un nou producte vectorial: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Queda per resoldre el tema de l'orientació, una cosa que podríem haver fet a mesura que fèiem els productes vectorials, controlant l'orientació final. També es pot fer al final: calculem $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, que resulta ser negatiu. Per tant, finalment, ja que volem mantenir el tercer vector per a ajustar-nos a l'enunciat, podem optar per canviar l'ordre dels dos primers o bé canviar-ne un de signe.

Problema 12

Imaginem que tenim el problema constructiu de col·locar una esfera amb centre a una certa distància d'un punt i segons una certa direcció. Donada la semirecta amb origen en el punt P i amb vector director en v, considerem la parametrització corresponent: $Q(t) = P + tv$, con $t \geq 0$. Obteniu el punt sobre la semirecta que dista 2 unitats de p.

Resolució:

Considerem la parametrització alternativa amb vector director unitari: $R(s) = P + s\frac{v}{\|v\|}$. N'hi ha prou d'escollir $s = 2$. Per tant, en la parametrització donada escollim $t = 2/||v||$, amb la qual cosa el punt buscat és $Q(2/||v||)$.

Problema 13

Suposem que volem programar animacions de translació segons plans paral·lels al $x = y$. Quina forma tenen els vectors w amb què es poden produir translacions T_w segons plans paral·lels al pla $x = y$? Raoneu la resposta.

Resolució:

Es pot resoldre obtenint els vectors ortogonals al pla $x - y = 0$, que és de vector normal $N = (-1, 1, 0)$, és a dir, els vectors $w = (a, b, c)$, el producte escalar del qual amb N és nul: $0 = N \cdot (a, b, c) = (1, -1, 0) \cdot (a, b, c) = a - b$. Són de la forma, doncs, $w = (a, b, c) = (a, a, c)$, amb a, c nombres reals qualssevol.

Exercicis 2

Problema 1

Sigui $C0$ la circumferència de centre l'origen i radi $R = 1$ i sigui Q l'el·lipse de centre (4, 5), semieixos 2, 3, i el semieix major del qual forma un angle de 30 graus amb el semieix positiu de les abscisses. Obteniu una concatenació de transformacions geomètriques que transformi $C0$ en Q.

Resolució:

Considerem $C0$ la circumferència de centre $C = O = (0, 0)$ i radi $R = 1$. Sigui Q l'el·lipse que es descriu en l'enunciat, resultat final d'aplicar una seqüència de transformacions geomètriques a $C0$.

Proposarem una solució possible, en el benentès que aquest tipus de problemes es poden resoldre en general de més d'una manera. L'ordre segons el qual s'apliquen les transformacions és important.

Primera transformació

Convertirem la circumferència $C0$ en una el·lipse $C1$ que sigui mètricament idèntica a $C0$, encara que amb el centre en $C = O = (0, 0)$ i amb els eixos principals respectivament coincidents amb els eixos de coordenades. Això es pot aconseguir mitjançant un canvi d'escala, concretament $E_O^{3,2}$, canvi d'escala respecte a l'origen amb factors de canvi d'escala: 3, segons la direcció de l'eix de les x; 2, segons la direcció de l'eix y. Aquest canvi d'escala triplica la dimensió dels objectes en la direcció de l'eix Ox i duplica la corresponent a l'eix Oy. Així, tindrem:

$$C1 = E_O^{3,2}(C0)$$

Segona transformació

Efectuem una rotació de $C1$ respecte a l'origen, d'angle 30 graus. És a dir, apliquem la transformació R_O^{30} a $C1$. El resultat és una el·lipse $C2$, mètricament idèntica a $C1$ i a a l'el·lipse final Q: $Q \;\; C2 = R_O^{30}(C1)$.

Tercera transformació

Només queda efectuar una translació de vector $w = (4, 5)$, per a obtenir l'el·lipse final: $Q = T_w(C2) = T_{(4,5)}(C2)$

Transformació completa

Per tant:

$$Q = T_w(C2) = T_{(4,5)}(R_O^{30}(C1)) = T_{(4,5)}(R_O^{30}(E_O^{3,2}(C0))) = (T_{(4,5)} \circ R_O^{30} \circ E_O^{3,2})(C0)$$

Així doncs, la concatenació de transformacions bàsiques (llegint de dreta a esquerra) és:

$$T_{(4,5)} \circ R_O^{30} \circ E_O^{3,2}$$

Observació

Observeu que una modificació simple del desenvolupament anterior ens permetria transformar un cilindre de base la circumferència donada, en el pla $z = 0$, en un "cilindre", de base el·líptica (cilindre el·líptic), de base l'el·lipse donada:

$$T_{(4,5,0)} \circ R_z^{30} \circ E_O^{3,2,1}$$

Problema 2

Considereu la figura *F1*, formada pel rectangle de vèrtexs $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (5, 4)$, $D = (1, 4)$. Considereu la figura *F5*, formada pel quadrat de costat 2 que té un vèrtex en el punt (1, 0), un costat paral·lel a la recta $y = x/3$ i està totalment contingut en el semiplà $y \geq 0$. Formuleu una composició de transformacions geomètriques afins del pla que transformi *F1* en *F5*.

Resolució:

Indiquem $A = (1, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (5, 4)$, $D = (1, 4)$, vèrtexs del rectangle, que indiquem amb *F1*. Observeu que els costats del rectangle són respectivament paral·lels als eixos de coordenades. Els costats del rectangle tenen longitud 4 (amplada, segons l'eix x), 2 (altura, segons l'eix y). Us recomanem que aneu dibuixant les figures *F* que s'aniran considerant.

Mètode 1

Utilitzarem les transformacions geomètriques més bàsiques possibles.

Primera transformació

Efectuem una "translació a l'origen", que portarà el punt A a l'origen de coordenades. El vector de translació ha de ser $-A$, i la translació serà $T_{-A} = T_{-(1,2)} = T_{(-1,-2)}$. La figura resultant serà el rectangle $F2 = T_{-A}(F1)$, rectangle amb les mateixes mesures que *F1* i de costats respectivament paral·lels als eixos de coordenades. Els vèrtexs A, B, C, D s'han transformat, respectivament, en $A' = O = (0, 0)$, $B' = (4, 0)$, $C' = (4, 2)$, $D' = (0, 2)$.

Segona transformació

Aplicarem un canvi d'escala a la figura obtinguda anteriorment a fi que la converteixin en un quadrat de costat 2, mètricament idèntica a la figura final. Això es pot fer mitjançant un canvi d'escala respecte a l'origen, amb la qual cosa es produeix la figura *F3*: $F3 = E_O^{(0.5,1)}(F2)$. Els vèrtexs A', B', C', D' s'han transformat, respectivament, en $A'' = (0, 0)$, $B'' = (2, 0)$, $C'' = (2, 2)$, $D'' = (0, 2)$.

Tercera transformació

Efectuarem una rotació de centre l'origen i angle a, amb $a = \arctan(1/3)$, d'acord amb l'equació de la recta i la condició sobre la inclusió en el semiplà de les y positives. Si els vèrtexs A'', B'', C'', D'' es transformen en A''', B''', C''', D''', aquest és l'angle que el costat $A'''B'''$ ha de formar amb el semieix $x+$. Per tant, apliquem $F4 = R_O^{a}(F3)$.

Quarta transformació

L'última transformació produirà la figura definitiva: $F5 = T_{(1,0)}(F4)$, resultat de la translació de vector (1, 0).

Així doncs, resumint, la concatenació de transformacions geomètriques serà (llegint de dreta a esquerra):

$T_{(1,0)} \circ R_O{}^a \circ E_O{}^{(0.5,1)} \circ T_{(-1,-2)}$

Altres mètodes

Hi ha més possibilitats. Indiquem $M = (1, 0)$.

Alternativa 1: $R_M{}^a \circ T_{(0,-2)} \circ E_A{}^{(0.5,1)}$

Alternativa 2: $R_M{}^a \circ E_M{}^{(0.5,1)} \circ T_{(0,-2)}$

Problema 3

Escriviu les equacions de la transformació geomètrica en el pla resultat de concatenar, en l'ordre que s'indica, les transformacions següents:

1. La rotació en el pla d'angle 45 graus i de centre el punt $C = (2, 3)$.

2. La translació de vector $u = (-1, 2)$.

Resolució:

La rotació que es demana s'obté per concatenació o composició de les transformacions bàsiques $T_C, T_{-C}, R_O{}^{45^0}$, en l'ordre que s'indica a continuació, de dreta a esquerra: $R_C{}^{45^0} = T_C \circ R_O{}^{45^0} \circ T_{-C}$. Si volem obtenir l'expressió en coordenades, l'hem d'aplicar a un punt arbitrari $P = (x, y)$, amb el qual operarem com a matriu columna $R_C{}^{45^0} P = (T_C \circ R_O{}^{45^0} \circ T_{-C})(P)$.

En termes matricials resulta:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (R_C{}^{45^0} c)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_C\left(R_O{}^{45^0}\left(T_{-C}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_C(R_O{}^{45^0}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}) = T_C\left(\begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Efectuant les operacions matricials, resultarà:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos 45 - (y-3)\sin 45 + 2 \\ (x-2)\sin 45 + (y-3)\cos 45 + 3 \end{pmatrix}$$

Tenint en compte que $\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos 45 - (y-3)\sin 45 + 2 \\ (x-2)\sin 45 + (y-3)\cos 45 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \end{pmatrix}$$

Al resultat obtingut cal aplicar a continuació la translació de vector u:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = T_u\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \end{pmatrix}$$

L'expressió en coordenades serà, doncs:

$$\begin{cases} x'' = (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y'' = (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \end{cases}$$

Problema 4

Escriviu les equacions de la transformació geomètrica en el pla resultat de concatenar, en l'ordre que s'indica, les transformacions següents:

1. Translació de vector $u = (a, b)$.

2. La rotació en el pla d'angle t i de centre el punt $P = (x0, y0)$.

3. Translació de vector $v = (c, d)$.

Resolució:

Escrivim en primer lloc les equacions de la translació T_u, en termes matricials.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

En segon lloc, escrivim les equacions de la rotació $R_P^{\,t} = T_P \circ R_O^{\,t} \circ T_{-P}$:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R_P^{\,t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'-x0 \\ y'-y0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'-x0)\cos t - (y'-y0)\sin t + x0 \\ (x'-x0)\sin t - (y'-y0)\cos t + y0 \end{pmatrix}$$

Ara cal substituir x', y' pels valors anteriors en funció de x, y:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'-x0)\cos t - (y'-y0)\sin t + x0 \\ (x'-x0)\sin t - (y'-y0)\cos t + y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+a-x0)\cos t - (y+b-y0)\sin t + x0 \\ (x+a-x0)\sin t - (y+b-y0)\cos t + y0 \end{pmatrix}$$

En tercer lloc, escrivim matricialment la translació de vector v:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''+c \\ y''+d \end{pmatrix}$$

Finalment substituïm x'', y'' pels seus valors respectius:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+a-x0)\cos t - (y+b-y0)\sin t + x0 + c \\ (x+a-x0)\sin t - (y+b-y0)\cos t + y0 + d \end{pmatrix}$$

Les equacions són, per tant:

$$\begin{cases} x'' = (x+a-x0)\cos t - (y+b-y0)\sin t + x0 + c \\ y'' = (x+a-x0)\sin t - (y+b-y0)\cos t + y0 + d \end{cases}$$

Problema 5

Sigui C un punt del pla. Considereu les translacions T_C, T_{-C} i la transformació $E_O^{\,a,b}$ de canvi d'escala respecte a l'origen i factors d'escala a, b. Escriviu el canvi d'escala $E_O^{\,a,b}$ en termes de les transformacions $T_C, T_{-C}, E_C^{\,a,b}$.

Resposta:

$$E_C^{\,a,b} = T_C \circ E_O^{\,a,b} \circ T_{-C}$$

Exercicis 3

Problema 1

Escriviu les equacions de la translació T_w en l'espai tridimensional de vector $w = (2, 3, 4)$.

Resposta:

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \\ z' = z+4 \end{cases}$$

Problema 2

Escriviu les equacions de la rotació positiva de 30 graus respecte de l'eix de coordenades *Ox* de l'espai tridimensional.

Resposta:

En termes matricials és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30 & -\sin 30 \\ 0 & \sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Per tant, efectuant el producte matricial:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos 30 - z\sin 30 \\ z' = y\sin 30 + z\cos 30 \end{cases}$$

N'hi ha prou ara de substituir: $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30 = \frac{1}{2}$.

Problema 3

Escriviu les equacions del canvi d'escala respecte de l'origen *O* i de factors d'escala 0, 5, 0, 75, 1, 5 segons les direccions dels eixos *x*, *y*, *z*, respectivament.

Resposta:

En primer lloc, en termes matricials resulta:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En coordenades, efectuant el producte matricial:

$$\begin{cases} x' = 0.5\mathrm{x} \\ y' = 0.75\mathrm{y} \\ z' = 1.5\mathrm{z} \end{cases}$$

Problema 4

Escriviu les equacions de la rotació positiva $R^z_{45^\circ}$ de 45 graus respecte de l'eix de coordenades *z* de l'espai tridimensional.

Resposta:

En termes matricials és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Efectuant el producte matricial:

$$\begin{cases} x' = x \cos 45 - y \sin 45 \\ y' = y \sin 45 + y \cos 45 \\ z' = z \end{cases}$$

Ara n'hi haurà prou de substituir: $\cos 45 = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 5

Escriviu les equacions de la rotació positiva de 60 graus respecte de l'eix que passa per C = (2, 3, 0) i que és perpendicular al pla xy.

Resposta:

Recordem que 60 graus són $a = \pi/3$ radiants.

En primer lloc, efectuarem una primera translació de vector $-C$, és a dir T_{-C}. En resulta, per tant:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ i en resulta: } \begin{cases} \bar{x} = x - 2 \\ \bar{y} = y - 3. \\ \bar{z} = z \end{cases}$$

Seguidament cal aplicar al resultat anterior una rotació de 60 graus respecte de l'eix de coordenades Oz:

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}\cos a - \bar{y}\sin a \\ \bar{x}\sin a + \bar{y}\cos a \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)\cos a - (y-3)\sin a \\ (x-2)\sin a + (y-3)\cos a \\ z \end{pmatrix}$$

Finalment, cal desfer la translació auxiliar inicial, aplicant la translació de vector C a l'últim resultat. En resulta finalment:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = (x-2)\cos a - (y-3)\sin a + 2 \\ y' = (x-2)\sin a + (y-3)\cos a + 3 \\ z' = z \end{cases}$$

Problema 6

Volem deformar l'esfera de radi 20, de centre l'origen de coordenades, fins a transformar-la en un objecte resultat d'aplicar una reducció del 50% en les dimensions segons la direcció de l'eix Ox, una reducció del 25% en les dimensions relatives a l'eix Oy, i deixant inalterades les dimensions segons l'eix Oz. Escriviu la transformació geomètrica que cal aplicar a l'esfera.

Resolució:

Cal aplicar una transformació de canvi d'escala amb els factors de reescalat següents, respecte de l'origen de coordenades:

a = 0,5 (segons l'eix x),

b = 0,25 (segons l'eix y)

c = 1 (segons l'eix z)

Per tant, la transformació és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x \\ 0.25y \\ z \end{pmatrix}$$

Finalment:

$$\begin{cases} x' = 0.5x \\ y' = 0.25y \\ z' = z \end{cases}$$

Problema 7

Considereu el triangle T determinat pels punts (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3). Suposeu que cal construir un cilindre *Q1* de radi 2 i altura 7 de manera que l'eix del cilindre sigui perpendicular al triangle T i passi pel seu baricentre. Suposem que una de les bases es troba sobre el pla del triangle T i que el cilindre està contingut en el semiespai que no conté l'origen, entre els dos semiespais determinats pel pla de T. Establiu una concatenació de transformacions afins que permeti obtenir aquest cilindre *Q1* a partir del cilindre *Q0* de radi 1, altura 1, eix *Oz*, base en el pla *xy*, contingut en el semiespai de les *z* positives.

Resolució:

Establim notació: A = (3, 0, 0), B = (0, 3, 0), C = (0, 0, 3). El baricentre és $M = \frac{1}{3}(A+B+C) = (1, 1, 1)$.

Indiquem amb *Q1* el cilindre que cal construir. Sigui *Q0* el cilindre que s'indica (de radi 1, altura 1, eix *Oz*, base al pla *xy*, amb l'afegit d'estar contingut en el semiespai de les *z* positives).

Calculem una direcció perpendicular al pla *ABC*, direcció que serà la de l'eix del cilindre *Q1* que volem construir. Això es pot fer fàcilment mitjançant el producte vectorial:

$$w = AB \wedge AC = (B-A) \wedge (C-A) = (9, 9, 9)$$

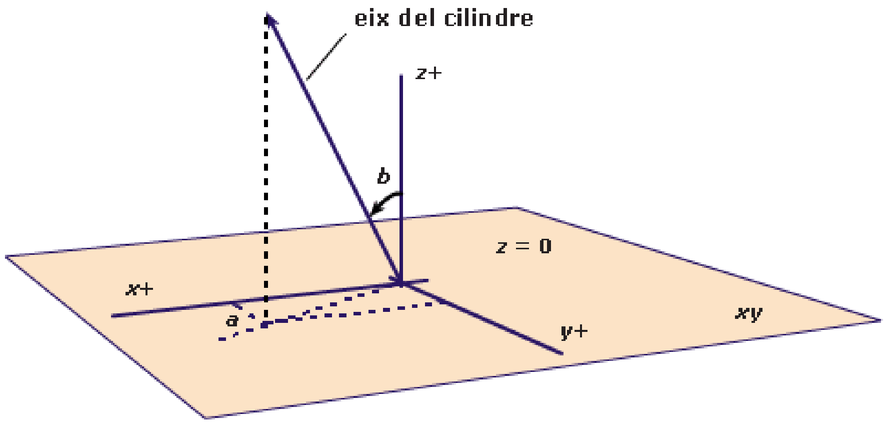
Per tant, l'eix del cilindre *Q1* que cal construir és la recta que passa per M i que té vector director w. Denotarem per e aquest eix.

El cilindre *Q1* que cal construir per concatenació de transformacions geomètriques té una de les bases sobre el triangle *ABC*. Ara bé, el pla *ABC* divideix l'espai en dos semiespais, i cal considerar quin conté el cilindre *Q1*, cas que donaria lloc a dos problemes o dues solucions possibles. Suposarem que el cilindre *Q1* està contingut en el semiespai que no conté l'origen de coordenades.

El problema fonamental és saber convertir el semieix *z*+, eix del cilindre *Q0*, en l'eix e, convenientment orientat, per concatenació de rotacions respecte dels eixos de coordenades. Per a això hem d'utilitzar els angles a, b de l'esquema següent. L'angle a és l'angle format pel semieix *x*+ i la projecció ortogonal del vector w sobre el pla *xy*, i és l'angle que formen els vectors (1, 0, 0) i (9, 9, 0) o, equivalentment, entre (1, 0, 0) i (1, 1, 0). Aquest angle es pot calcular amb la fórmula: $\cos a = \frac{(1, 0, 0).(1,1,0)}{\|1, 0, 0\|\|1, 1, 0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En aquest cas és a = 45 graus.

L'angle b s'obté de manera semblant:

$$\cos b = \frac{(0, 0, 1).(1, 1, 1)}{\|(0, 0, 1)\|\|(1, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Així, } b = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Primera transformació. Crearem un cilindre *Q2* mètricament idèntic al cilindre final *Q1*, però situat en la posició del *Q0*. Es tracta d'aplicar un canvi d'escala no uniforme, concretament $E_O^{2,2,7}$. Amb aquesta transformació el radi es duplica i l'altura es multiplica per 9. Així, doncs $Q2 = E_O^{2,2,7}(Q0)$.

Segona transformació. Convertim el cilindre *Q2* en una còpia idèntica *Q3*, l'eix del qual passi per l'origen de coordenades, estigui situat sobre el pla de coordenades *xz*, i formi un angle *b* amb el semieix *z*+. Per a això podem aplicar una rotació positiva d'angle *b* respecte de l'eix *y*+: $Q3 = R_y^b(Q2)$.

Tercera transformació. Convertim el cilindre *Q3* en un altre idèntic *Q4*, amb l'eix que passi per l'origen de coordenades i paral·lel a l'eix *e* del cilindre final *Q1*. Per a això, n'hi ha prou d'aplicar la rotació $Q4 = R_z^a(Q3)$.

Quarta transformació. Cal transformar el centre de la base inferior de *Q4*, que coincideix amb l'origen, en el punt *M*, mitjançant la translació corresponent, de vector *OM*, és a dir, $Q5 = T_M(Q4)$.

Finalment, doncs, la concatenació de transformacions, llegint de dreta a esquerra, és:

$$T_M \circ R_z^a \circ R_y^b \circ E_O^{2,2,7}$$

Observació: hi ha altres solucions possibles.

Problema 8

Escriviu les equacions de la composició de les transformacions geomètriques que s'indiquen a continuació, en l'ordre en què s'indiquen.

1. Translació de vector $w = (1, 2, 3)$

2. Rotació positiva d'angle 45 graus respecte de l'eix *Ox*.

Resposta:

Obtindrem l'expressió de la transformació.

Translació:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T_w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & + & 2 \\ z & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

Rotació:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_x^{45} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & -\sin 45 \\ 0 & \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\cos 45 - z'\sin 45 \\ y'\sin 45 + z'\cos 45 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Concatenant totes dues transformacions s'obté:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} - z'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'\frac{\sqrt{2}}{2} + z'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Les equacions deriven immediatament de l'expressió matricial anterior:

$$\begin{cases} x'' = x+1 \\ y'' = (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z'' = (y+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (z+3)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Problema 9

Escriviu les equacions de la rotació positiva de 45 graus respecte de l'eix que passa pel punt (2, 3, 0) i és paral·lel a l'eix *Oz*.

Resposta:

En primer lloc, 45 graus són $a = \pi/4$ radiants; tinguem en compte que $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin a$. Si $w = (2, 3, 0)$, cal calcular $R^{a}_{e} = T_{w} \circ T^{a}_{z} \circ t_{-w}$, si e és l'eix de rotació. Escrivim:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_e^a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_w\left(R_z^a \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x-2)\cos a - (y-3)\sin a + 2 \\ (x-2)\sin a + (y-3)\cos a + 3 \\ z \end{pmatrix}$$

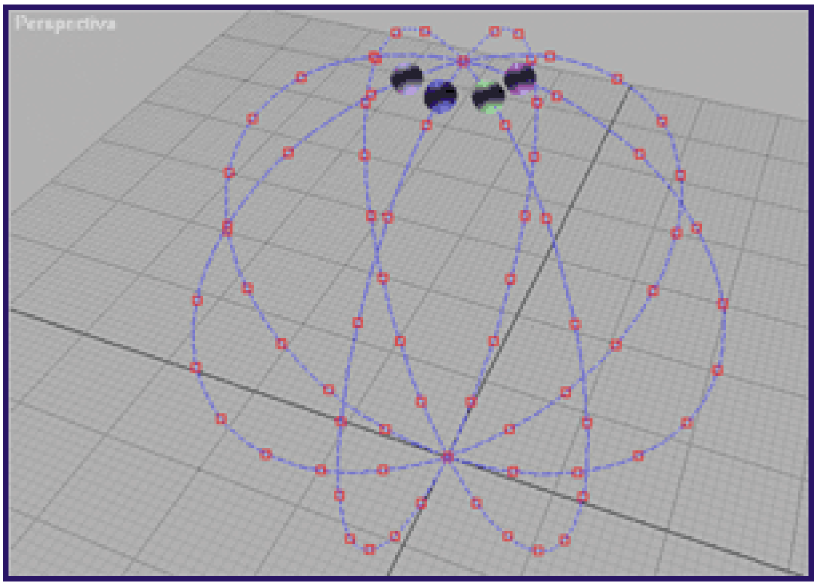
Amb la qual cosa:

$$\begin{cases} x' = (x-2)\cos a - (y-3)\sin a + 2 \\ y' = (x-2)\sin a + (y-3)\cos a + 3 \\ z' = z \end{cases}$$

Ara només falta substituir sin a i cos a pels seus valors respectius.

Problema 10

Es tracta de programar una funció per a produir l'animació d'una esfera mòbil *EM* que es desplaça de manera que el seu centre recorre una circumferència fixa *CF*.



Descripció de la circumferència fixa *CF*: és de radi *R*, el seu centre $C = (0, 0, ZC)$ està situat sobre l'eix de coordenades *Oz*, a una altura *ZC* (relativa al pla $z = 0$) (*ZC* pot ser positiva, nul·la o negativa); el pla que conté la circumferència *CF* conté l'eix de coordenades *Oz* i s'obté com a resultat d'aplicar la rotació positiva d'angle *ALFA*, respecte de l'eix *Oz*, al pla de coordenades vertical *xz*.

El punt d'inici de l'animació ha de ser el punt més alt de la circumferència *CF*.

Tots els aspectes no definits aquí (per exemple, el sentit de recorregut sobre la circumferència) queden a lliure elecció.

Nom de la funció: *AnimacioEsferaSobreCircumferencia*.

Arguments que li passarem:

REM: radi de l'esfera mòbil *EM*

ALFA: angle de rotació

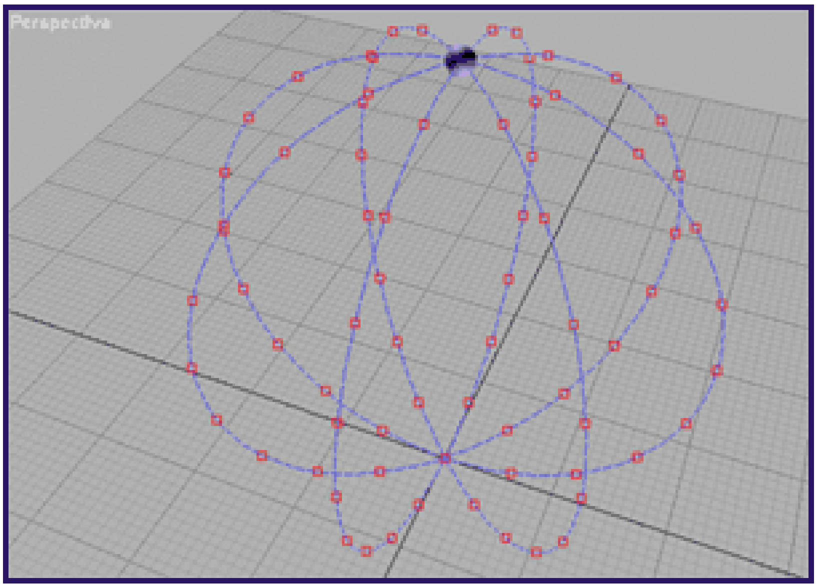
ZC: altura del centre de la circumferència *CF*

R: radi de la circumferència *CF*

Com a exemple d'ús cal crear una escena en la qual hi hagi 4 esferes animades obtingudes mitjançant la funció anterior, totes sobre circumferències del mateix radi *R*, amb esferes d'idèntic radi *REM* i amb $ZC = R$ per a totes la circumferències. Cal prendre diferents angles *ALFA* per a obtenir les variants següents:

- Esfera sobre el pla $y = 0$
- Esfera sobre el pla $x = 0$
- Esfera sobre el pla $x = y$
- Esfera sobre el pla $x = -y$

Totes les esferes estan inicialment superposades amb centre en el punt més alt de la trajectòria.



Exercicis d'autoavaluació

1. El mòdul del vector (1, 1, 1) és...

a) 1
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2}$
d) $1/\sqrt{3}$
e) Cap dels anteriors.

2. Normalitzar un vector no nul...

a) és dividir-lo pel seu mòdul.
b) és multiplicar-lo pel seu mòdul.
c) No existeix tal operació.
d) és duplicar el seu mòdul.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

3. El mòdul del vector director de la bisectriu del primer quadrant del pla bidimensional és...

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}$
c) 1
d) $1/\sqrt{2}$
e) Cap dels anteriors

4. Si $P = (2, 3, 0)$, $Q = (1, -1, 1)$, el mòdul de PQ és...

a) $3\sqrt{2}$
b) 2
c) $\sqrt{2}$
d) Cap dels anteriors

5. Si una recta r té la direcció donada pel vector (u, v), són perpendiculars a aquesta les rectes de vector director...

a) $(-u, -v)$
b) $(-v, u)$
c) (v, u)
d) $(-u, -v)$
e) Cap dels anteriors.

6. Els vectors ortogonals al vector (1, 1, 0) són

a) només els de la forma $(0, 0, z)$.
b) els de la forma $(-x, x, z)$.
c) només els de la forma $(-x, x, 0)$.
d) només els de la forma $(-x, x, 0)$.
e) Cap dels anteriors.

7. Les rectes de l'espai tridimensional perpendiculars a la bisectriu del primer quadrant x+ y+ del pla $z = 0$ tenen direcció donada per...

a) $(a, 1 - a, 0)$.
b) $(0, 0, 0)$.
c) $(-a, a, b)$.
d) $(1, 1, 1)$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

8. Els vectors ortogonals a la bisectriu del quadrant x–y– del pla xy són...

a) múltiples escalars (no nuls) de $(-1, -1, 0)$.
b) de la forma $(a, -a, b)$
c) No es pot determinar.
d) No té sentit.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

9. Els vectors perpendiculars a $(1, 1, 1)$...

a) són els de la forma $(x, y, -x - y)$.
b) són els múltiples escalars (no nuls) de $(1, 1, 1)$.
c) són els vectors múltiples escalars de $(1, 1, 0)$.
d) No es pot determinar.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

10. En l'espai tridimensional, $x = y$...

a) no és cap pla.
b) és un pla perpendicular al pla xy.
c) és un pla paral·lel al xy.
d) és un pla perpendicular al pla vertical yz.
e) Cap dels anteriors.

11. Donats els punts A, B, C no alineats de l'espai tridimensional, $AB \wedge AC$

a) és un vector perpendicular al pla ABC.
b) és un vector paral·lel a AB.
c) és un vector paral·lel a AC.
d) és perpendicular a AC, però no a BC.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

12. Com podem obtenir un vector ortogonal a w i a u?

a) No es pot obtenir.
b) $w - u$
c) Mitjançant $u \wedge w$, però no $w \wedge u$
d) $u \wedge w$
e) Cap de les respostes anteriors no és correcta

13. Si P, Q, R són punts no alineats del pla $ax + by + cz + d = 0$, i $N = (a, b, c)$...

a) N és ortogonal a PQ i a PR.
b) N és ortogonal a PQ, però no a PR.
c) N no és múltiple escalar del producte vectorial $PQ \wedge$ PR.
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

14. Si els vectors $(1, a, 1)$, $(2, 1, -1)$ són ortogonals, és $a = \ldots$

a) -1
b) 0
c) 1
d) No es pot determinar.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

15. Si els vectors (1, a, –1), (2, 2, b) són ortogonals, es compleix

a) $b = 0$
b) $b = 2 \cdot a - 2$
c) $b = 2 \cdot a + 2$
d) Cap dels anteriors.

16. Donada una recta r de l'espai tridimensional...

a) hi ha una única direcció perpendicular a r.
b) hi ha exactament dues direccions perpendiculars a r.
c) hi ha infinites direccions perpendiculars a r.
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

17. Si dues rectes tridimensionals, de vectors directors respectius u, v, defineixen la mateixa direcció, llavors

a) u.v=0
b) u v = 0
c) u v ^{1} 0
d) v u ^{1} 0
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

18. El punt del segment AB que dista de B 1/4 de la distància de A a B, s'obté mitjançant la parametrització $A + t(B - \mathrm{A})$ mitjançant

a) $t = 1/4$
b) $t = 3/4$
c) $t = 1$
d) $t = 2/4$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

19. Si w és unitari, $P = A + tw$ dista 300 unitats de A si...

a) $t = 1$
b) $t = 1/2$
c) $t = 300$
d) $t = 300/2$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

20. Sigui A el punt situat sobre la bisectriu del quadrant de coordenades no negatives ($x \geq 0$, $y \geq 0$) del pla horitzontal $z = 0$, ja que dista 200 unitats de l'origen de coordenades. Llavors:

a) $A = (200, 200, 0)$
b) $A = 200(1, 1, 0)$
c) $A = (200 \cos(\pi/3), 200 \sin(\pi/3), 0)$
d) $A = (200 \cos(\pi/4), 200 \sin(\pi/4), 0)$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

21. Si T_c indica la translació de vector C i $120(\pi/180)R$ indica la rotació d'angle a respecte de l'origen O, la rotació d'angle a respecte del punt C es pot obtenir com (llegint de dreta a esquerra)...

a) $T_C \circ R_o^a \circ T_{-C}$
b) $T_{-C} \circ R_o^a \circ T_C$
c) $T_{-C} \circ R_o^a$
d) $R_o^a \circ T_{-C}$
e) $T_{-C} \circ R_o^a$
f) Cap dels anteriors.

22. Indiqueu quina de les equacions següents correspon a la rotació antihorària en el pla bidimensional respecte de l'origen ($a \geq 0$):

a) $x' = x \cos a + y \sin a$; $y' = -x \sin a + \mathrm{i} \cos a$
b) $x' = x \cos a + y \sin \mathrm{a}$; $y' = -x \sin a + y \cos a$

c) Cap de les anteriors.

23. Considereu la paràbola *P0*, d'equació $y = 2x^2 + 12$, i la paràbola *P1*, d'equació $x = -2y^2 + 13$. Considereu diverses seqüències ordenades de transformacions geomètriques (llegint de dreta a esquerra). Indiqueu quina (o quines) transformen la figura *P0* a la figura *P1* (si n'hi ha alguna).

a) $T_{(13,\,0)} \circ R_o^{\,90°} T_{(0,\,-12)}$
b) $T_{(13,\,0)} \circ R_o^{\,90°} T_{(-12,\,0)}$
c) $T_{(0,\,-12)} \circ R_o^{\,90°} T_{(13,\,0)}$
d) $T_{(13,\,0)} \circ R_o^{\,-90°} T_{(0,\,-12)}$
e) Cap de les anteriors.

24. En el pla bidimensional, la rotació antihorària de 90 graus respecte de l'origen de coordenades té equacions...

a) $x' = y,\ y' = x$
b) $x' = -y,\ y' = x$
c) $x' = y,\ y' = -x$
d) $x' = x - y,\ y' = x + y$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

25. En el pla bidimensional, la rotació horària de 90 graus respecte de l'origen de coordenades té equacions...

a) $x' = y,\ y' = x$
b) $x' = -y,\ y' = x$
c) $x' = y,\ y' = -x$
d) $x' = x - y,\ y' = x + y$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

26. Les equacions de la translació de vector (2, 3) són...

a) $x' = x + 2,\ y' = y + 3$
b) $x' = x - 2,\ y' = y - 3$
c) $x' = 2x,\ y' = 3y$
d) No es pot efectuar.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

27. La matriu de la transformació afí $\begin{cases} x' = 2x + 4y + 3 \\ y' = -x + 6y + 5 \end{cases}$ és...

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

28. Donada l'afinitat de matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ i de vector de translació $W = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, les seves equacions són...

a) $x' = 2x - y + 5,\ y' = -2y + 6$
b) $x' = -x - 2y + 5,\ y' = 2x + 6$
c) $x' = 2x + 5,\ y' = -x - 2y + 6$
d) $x' = -2y + 5,\ y' = 2x - y + 6$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

29. El canvi d'escala respecte de l'origen que triplica la dimensió segons l'eix *Ox* i duplica la dimensió segons l'eix *Oy* té equacions...

a) $x' = (1/3)x$, $y' = (1/2)y$
b) $x' = 3x$, $y' = 2y$
c) $x' = 2x$, $y' = 3y$
d) No es pot aplicar.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

30. Donat el canvi d'escala respecte de l'origen d'equacions $x' = 4x$, $y' = (1/2)y$...

a) duplica la dimensió en la direcció de l'eix *Ox* i quadruplica la dimensió segons l'eix *Oy*.
b) cuadriplica la dimensió en la direcció de l'eix *Ox* i redueix a la meitat la dimensió segons l'eix *Oy*.
c) redueix en un 50% la dimensió segons l'eix *Ox*.
d) No té sentit.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

31. El resultat d'aplicar la transformació geomètrica $f(X) = AX + W$, amb $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, al punt $P = (1, -1)$ és

a) (8, –6)
b) (2, 0)
c) (–8, 6)
d) (4, 5)
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

32. Si $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, llavors $a = ...$

a) 2
b) –1
c) 0
d) 4
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

33. En la transformació $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el transformat de l'origen és

a) (0, 0)
b) (–1, 1)
c) (1, –1)
d) (1, 1)
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

34. En la transformació geomètrica $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 9 \\ y' = -x + y - 6 \end{cases}$ el transformat de $P = (1, 1)$ és...

a) (0, 0)
b) (1, 1)
c) (14, –6)
d) (–6, 14)
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

35. Si $a < 0$, la matriu de rotació $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ produeix un gir...

a) horari.
b) antihorari.
c) No es pot determinar si és horari o antihorari: depèn de *a*.
d) No produeix cap gir.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

36. La transformació geomètrica afí $f(X) = AX$ per a la qual $f(1, 0) = (0, 1)$, $f(0, 1) = (-2, -1)$ és...

a) $x' = -2x$, $y' = y - x$
b) $x' = -2y$, $y' = y - x$
c) $x' = -2y$, $y' = x - y$
d) $x' = x + y$, $y' = x - y$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

37. Si $a < 0$, la matriu $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ produeix un gir

a) antihorari.
b) horari.
c) No es pot determinar si és horari o antihorari: depèn de *a*.
d) No produeix cap gir.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

38. La matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ produeix

a) una rotació en el sentit de les agulles del rellotge.
b) una rotació antihorària.
c) un canvi d'escala.
d) una translació.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

39. La matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$...

a) no pot ser matriu de rotació respecte de l'origen.
b) és la matriu de rotació de 180 graus respecte de l'origen.
c) correspon a una translació en el pla.
d) no correspon a una transformació afí.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

40. La matriu $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és...

a) la matriu de la rotació horària de 90 graus respecte de l'origen de coordenades.
b) la matriu de la rotació antihorària de 180 graus respecte de l'origen de coordenades.
c) la matriu d'una translació.
d) la matriu de la rotació antihorària de 90 graus respecte de l'origen de coordenades.

41. El simètric del punt $P = (a, b, c)$ respecte del pla de coordenades *xz* és...

a) $(a, b, 0)$
b) $(a, 0, c)$
c) (c, a, b)
d) $(a, 0, c)$
e) Cap de les opcions anteriors.

42. Les equacions de la rotació positiva d'angle a respecte de l'eix *Ox* són...

a) $x' = x$; $y' = y \cos a - z \sin a$; $z' = y \sin a + z \cos a$.
b) $x' = x \cos a + z \sin a$; $y' = y$; $z' = -x \sin a + z \cos$ a.
c) $x' = x \cos a - y \sin a$; $y' = x \sin a + y \cos a$; $z' = z$.
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

43. La matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \end{pmatrix}$...

a) és la matriu de rotació positiva d'angle *a* respecte de l'eix *x*.
b) és la matriu de rotació positiva d'angle *a* respecte de l'eix *y*.
c) és la matriu de rotació positiva d'angle *a* respecte de l'eix *z*.

d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

44. La matriu $\begin{pmatrix} 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$...

a) és la matriu de rotació positiva d'angle a respecte de l'eix x.
b) és la matriu de rotació positiva d'angle a respecte de l'eix y.
c) és la matriu de rotació positiva d'angle a respecte de l'eix z.
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

45. La matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos a & 0 & \sin a \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$...

a) és la matriu de rotació positiva d'angle a respecte de l'eix x.
b) és la matriu de rotació positiva d'angle a respecte de l'eix y.
c) és la matriu de rotació positiva d'angle a respecte de l'eix z.
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

46. Les equacions de la rotació positiva de 90 graus respecte de l'eix x (vista com a antihorària des de x+) són...

a) $x' = x$; $y' = z$; $z' = -y$
b) $x' = -z$; $y' = y$; $z' = x$
c) $x' = x$; $y' = -z$; $z' = y$
d) $x' = x$; $y = -z$; $z' = -y$
e) Cap dels anteriors.

47. El simètric del punt $P = (a, b, c)$ respecte de l'eix de coordenades Oz és

a) $(-a, -b, c)$
b) $(-a, -b, 0)$
c) $(a, -b, c)$
d) $(-a, b, c)$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

48. La matriu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$...

a) és la matriu de la rotació positiva de 90 graus respecte de l'eix Oz.
b) és la matriu de la rotació positiva de 180 graus respecte de l'eix Oz.
c) és la matriu de la rotació positiva de 90 graus respecte de l'eix Ox.
d) és la matriu de la rotació de 180 graus respecte de l'eix Oy.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

49. La matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ és la matriu de...

a) el canvi d'escala respecte de l'origen, de factors 2 (eix x), 4 (eix y), 0,5 (eix z).
b) un canvi d'escala respecte de l'origen que redueix a la meitat la dimensió segons l'eix y.
c) la translació de vector (2, 4, 0,5).
d) una rotació respecte d'un eix de coordenades.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

50. La matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ correspon a...

a) una rotació respecte de l'eix Oy.
b) un canvi d'escala de factors d'escala 2, 4, 3.

c) la translació de vector (2, 4, 3).
d) la translació de vector (3, 4, 2).
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

51. Si $a < 0$, la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ produeix...

a) una rotació respecte de l'eix *y*, antihorària vista des de *y*+.
b) una rotació respecte de l'eix *x*, antihorària vista des de *x*–.
c) una rotació respecte de l'eix *z*, horària vista des de *z*–.
d) un canvi d'escala.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

52. La rotació de 45 graus respecte de l'eix perpendicular al pla $z = 0$ que passa pel punt $C = (2, 5, 0)$ és...

a) $T_C \circ R_z^{45} \circ T_{-C}$
b) $T_C \circ R_z^{-45} \circ T_{-C}$
c) $T_{-C} \circ R_z^{45} \circ T_C$
d) $T_{-C} \circ R_z^{-45} \circ T_C$
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

53. La composició $T_{-C} \circ R_z^{-45} \circ T_C$...

a) $R_z^{90} \circ R_y^{90}$
b) R_z^{90}
c) R_z^{-90}
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

54. La composició de rotacions en l'espai tridimensional...

a) és sempre commutativa.
b) en general no és commutativa.
c) no sempre es pot efectuar.
d) només es pot efectuar si els eixos respectius són perpendiculars.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

55. La matriu R_z^{-90}...

a) és una rotació d'angle *b* respecte de l'eix *x*.
b) és una rotació respecte de l'eix *y*, horària vista des de *y*+ si $b < 0$.
c) és una rotació respecte de l'eix *y*, horària vista des de *y*+ si $b > 0$.
d) és una rotació respecte de l'eix *y*, antihorària vista des de *y*– si $b > 0$.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

56. La composició $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspon a efectuar...

a) primer una rotació respecte de l'eix *x*, seguida d'un canvi d'escala.
b) primer un canvi d'escala, seguit per una rotació respecte de l'eix *z*.
c) primer una rotació respecte de l'eix *x*, seguit d'una altra rotació respecte de l'eix *y*.
d) primer una rotació respecte de l'eix *z*, seguit d'un canvi d'escala.
e) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

57. Volem convertir el cub de centre l'origen, longitud d'aresta 2, i de costats respectivament paral·lels als eixos de coordenades, en un altre cub situat d'idèntica manera però d'aresta 3. Cal aplicar...

a) una rotació respecte de l'eix *x*.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

f) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

58. Si hem d'efectuar una reducció del 50% de la dimensió d'un prisma segons la direcció de l'eix *x* i un increment del 200% en la direcció de l'eix *y*, aplicarem...

a) $\begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) No es pot aplicar cap transformació.

d) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) Cap de les anteriors.

59. Les equacions de la transformació afí de matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ i de vector de translació $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ són...

a) $x' = x - 2y - z - 1$; $y' = -3x + 3z + 2$; $z' = 4x + 5y + 6z + 1$
b) $x' = -3x + 3z + 2$; $y' = x - 2y - z - 1$; $z' = 4x + 5y + 6z + 1$
c) $x' = 4x + 5y + 6z + 1$; $y' = -3x + 3z + 2$; $z' = x - 2y - z - 1$
d) Cap de les opcions anteriors no és correcta.

60. Les equacions de la translació de vector (3, 5, 7) són...

a) $x' = x - 3$; $y' = y - 5$; $z' = z - 7$
b) $x' = x + 3$; $y' = y + 5$; $z' = z + 7$
c) $x' = 3x$; $y' = 5y$; $z' = 7z$

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. b

2. a

3. b

4. a

5. b

6. b

7. c

8. b

9. a

10. a

11. a

12. d

13. a

14. a

15. c

16. c

17. b

18. b

19. c

20. d

21. a

22. b

23. a, b

24. b

25. c

26. a

27. b

28. c

29. b

30. b

31. e

32. c

33. b

34. c

35. a

36. c

37. a

38. c

39. a

40. b

41. b

42. a

43. d

44. d

45. d

46. c

47. a

48. b

49. a

50. e

51. b

52. a

53. d

54. b

55. b

56. d

57. e

58. b

59. a

60. b