Trigonometría aplicada al diseño gráfico

Salvador Linares Mustarós

PID_00215907

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

Introducción 5

1. Conceptos básicos 7
1.1. Triángulos. Definición y clasificación 7
1.2. Ángulos de un triángulo 7
1.3. Triángulos rectángulos 9
1.4. Teorema de Pitágoras 10
1.5. Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo 11
1.6. Propiedades que se cumplen en un triángulo 12
1.7. Propiedades que se cumplen en un triángulo rectángulo 12
1.8. Propiedades que se cumplen en un triángulo equilátero de lado *a* 13

2. Ejercicios con solución 15

Introducción

En este módulo didáctico aprenderemos trigonometría elemental. Este es un tema básico para dominar los conceptos de distancias, ángulos y proporciones. Su estructuración está pensada para ir aprendiendo toda la teoría de una manera gradual y con un sentido coherente con nuestro concepto de la realidad.

1. Conceptos básicos

1.1. Triángulos. Definición y clasificación

Un triángulo es una figura plana formada por tres segmentos lineales secuenciales. Cada uno de estos segmentos se denomina lado del triángulo y cada uno de los puntos donde se unen dos lados se denomina vértice del triángulo.

Los triángulos se pueden clasificar según la longitud de sus lados. Si los tres lados tienen la misma longitud, el triángulo se denomina equilátero. Si de los tres lados solo dos son iguales, entonces el triángulo se denomina isósceles. Finalmente, si los tres lados son diferentes dos a dos, el triángulo se denomina escaleno.

1.2. Ángulos de un triángulo

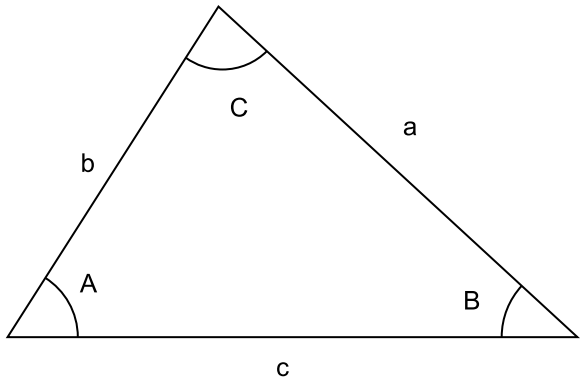
Euclides definió el ángulo en su tratado matemático *Elementos* como:

> "[...] la inclinación en un plano de una línea sobre otra con la que se encuentra y no forma línea recta."

El símbolo habitual para identificar un ángulo es "$\angle$".

La palabra *ángulo*, sin embargo, tiene relación con una palabra griega relacionada con la palabra *doblar*. No sería extraño, por lo tanto, que antiguamente se viera el ángulo como el doblamiento de una parte del segmento. De este modo, un ángulo recto se podría identificar como la inclinación o el doblamiento que se hace a una parte de un segmento hasta que se ha conseguido el cuarto de vuelta de una circunferencia. Es decir, iríamos doblando un trozo de segmento hasta obtener una forma tipo "L".

Es habitual denominar los tres ángulos internos de un triángulo en función del nombre de los lados. Por ejemplo, si el triángulo tiene por lados a, b y c, los ángulos opuestos a cada lado reciben el nombre de ángulo A, ángulo B y ángulo C. El dibujo siguiente ilustra esta notación.



Cada triángulo se puede clasificar en uno de los conjuntos definidos anteriormente a partir del número de ángulos iguales que tenga el triángulo, puesto que se cumplen las propiedades siguientes:

1) Los tres ángulos internos de un triángulo equilátero son iguales.

2) Un triángulo isósceles tiene solo dos ángulos internos iguales.

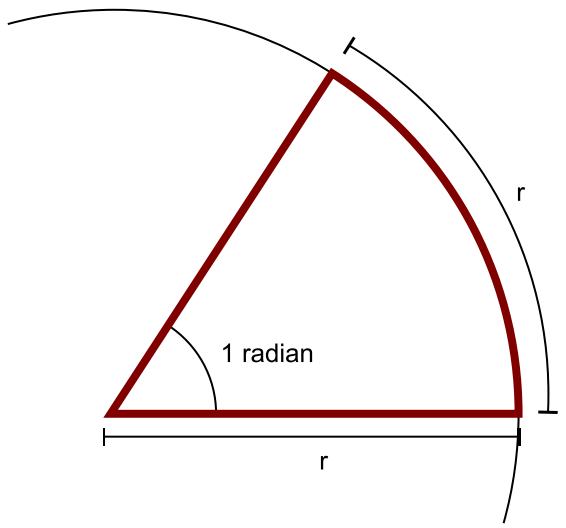
3) Un triángulo escaleno tiene todos los ángulos internos distintos.

Al igual que un intervalo de tiempo se puede expresar en minutos o en segundos, los ángulos se pueden expresar en grados o radianes. No hay convenio sobre qué utilizar normalmente y, por lo tanto, es posible que un programa utilice grados a la hora de calcular el seno, el coseno y la tangente, mientras que otro utilice radianes. Saber convertir los ángulos en el otro tipo de expresión es, por lo tanto, obligatorio para programar sin errores.

Un **grado sexagesimal** es una unidad de medida de los ángulos del plano definido como la sexagésima parte de cualquiera de los ángulos de un triángulo equilátero (por lo tanto, los ángulos de un triángulo equilátero miden 60 grados). Su símbolo es "º".

El **radián** es otra unidad de medida de los ángulos del plano definido como el ángulo que comprende un arco de circunferencia con una longitud igual al radio de la circunferencia. Su símbolo es *rad*.

El dibujo siguiente nos ayuda a hacernos una idea de la medida de un ángulo de un radián:



Dado que la longitud de una circunferencia de radio r es $2 \cdot \pi \cdot r$, siempre tenemos la equivalencia entre unidades siguiente: $360^0 = 2\pi$ rad, o simplificando: $180^0 = \pi$ rad.

Observamos que, entonces,

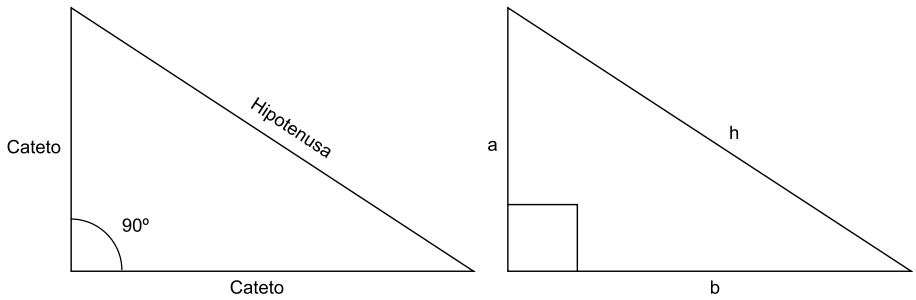
$$1\,rad = 1\,rad \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ radiants} = 57{,}29577951308232087679815481 41\ldots^{\circ}$$

1.3. Triángulos rectángulos

Un **triángulo rectángulo** es aquel triángulo que tiene un ángulo de 90º.

Los lados de los triángulos adjuntos al ángulo de 90º se denominan **catetos**, y el lado del triángulo enfrentado al ángulo de 90º se denomina **hipotenusa**.

Por lo tanto, dos posibles dibujos de triángulos rectángulos son:



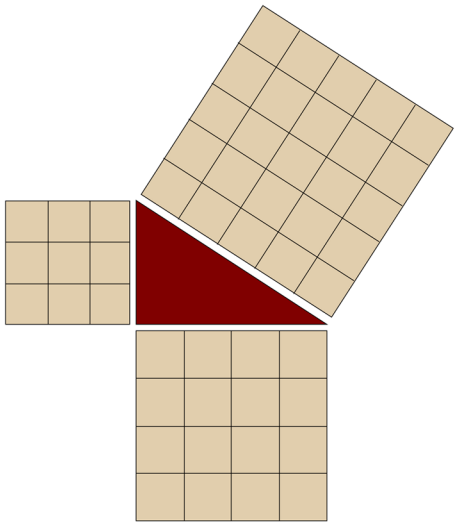
Normalmente, los ángulos de 90º, denominados también ángulos rectos, los representaremos en forma de cuadrado o cajita sin poner el valor de 90.

1.4. Teorema de Pitágoras

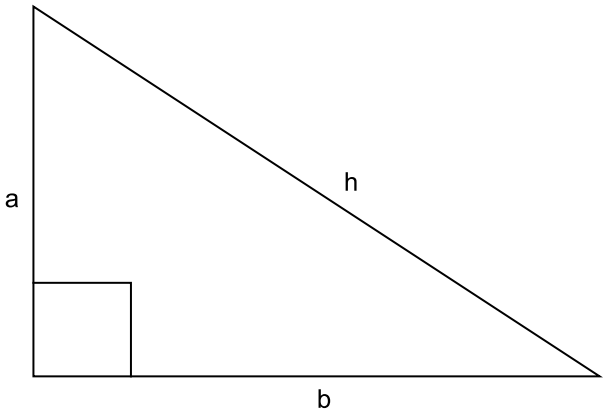
Pitágoras de Samos fue un filósofo y matemático griego que vivió aproximadamente entre el 570 y el 495 a. C.

Pitágoras fundó una orden de tipo comunal y secreto. Todas las contribuciones matemáticas de sus miembros le eran atribuidas.

El teorema de Pitágoras afirma que el área del cuadrado formado con la hipotenusa coincide con la suma de las áreas de los cuadrados formados con los lados.



Esta condición se puede expresar de manera algebraica a partir de un triángulo rectángulo general tipo:

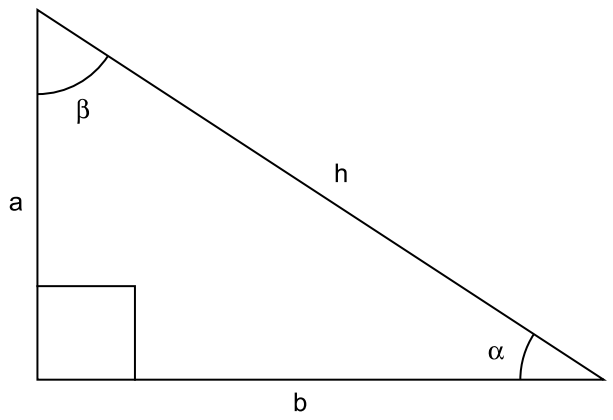


Dado que los catetos se han denominado *a y b* y la hipotenusa *h*, entonces el **teorema de Pitágoras** afirma que $h^2 = a^2 + b^2$.

Nota

También resulta habitual representar la condición anterior como: $h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

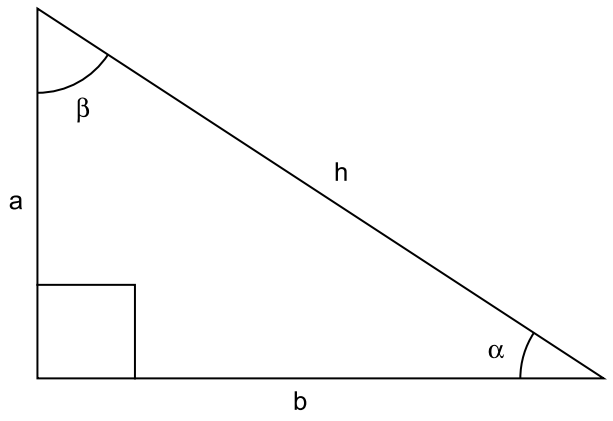
Generalmente, en triángulos rectángulos el ángulo opuesto al cateto denominado *a* se denomina alfa y es representado por la letra griega α. De manera análoga, el ángulo opuesto al cateto *b* se denomina beta y es representado por la letra griega β.



1.5. Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo

Dado un triángulo rectángulo, se define el **seno de un ángulo** como el lado opuesto al ángulo dividido por la hipotenusa; el **coseno de un ángulo**, como el lado contiguo al ángulo dividido por la hipotenusa; y la **tangente de un ángulo**, como el lado opuesto a un ángulo dividido por el lado contiguo al ángulo.

De este modo, por ejemplo, con el dibujo siguiente:



$$\sin\alpha = \frac{a}{h} \qquad \sin\beta = \frac{b}{h}$$

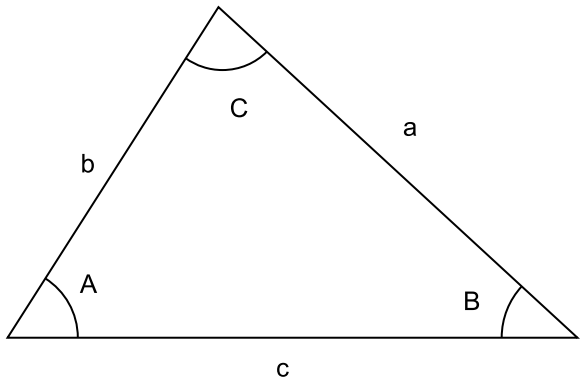
$$\cos\alpha = \frac{b}{h} \qquad \cos\beta = \frac{a}{h}$$

$$\text{y } tg\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad tg\,\beta = \frac{b}{a}$$

Ni el seno, ni el coseno ni la tangente dependen de las medidas del triángulo elegido. Es decir, dos triángulos rectángulos con los mismos ángulos internos tienen los mismos valores de senos, cosenos y tangentes de los ángulos, a pesar de que las medidas de los lados sean distintas.

1.6. Propiedades que se cumplen en un triángulo

Dado un triángulo tipo:



1) El **perímetro del triángulo** o la longitud de su contorno es $a + b + c$.

2) El **área del triángulo** es la mitad de lo que mide la base por lo que mide la altura.

3) $A + B + C = 180$.

La suma de los tres ángulos es 180º o π radianes, es decir, A + B + C = 180º o A + B + C = π rad.

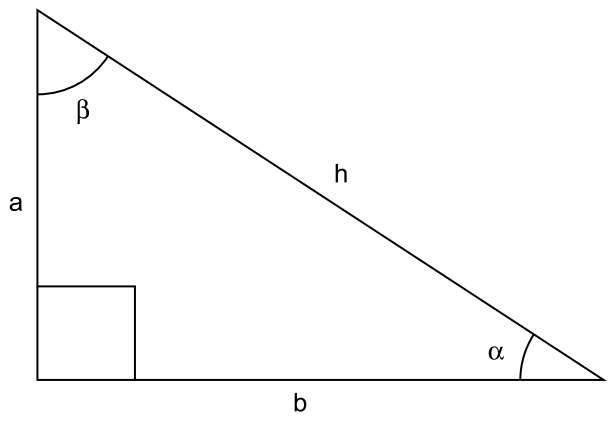
4) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$

y $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

1.7. Propiedades que se cumplen en un triángulo rectángulo

Dado un triángulo rectángulo del tipo siguiente:



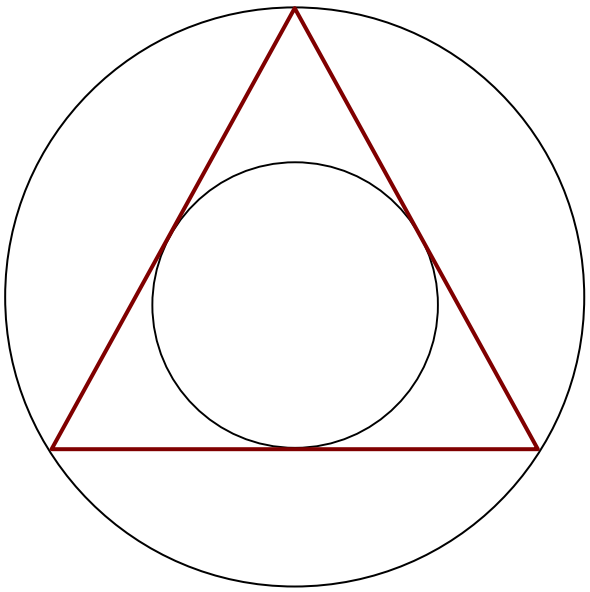
1) El perímetro del triángulo o la longitud de su contorno es $a + b + h$.

2) El área del triángulo es la mitad de $a \cdot b$.

3) $\alpha + \beta = 90^{o}$.

4) $h^2 = a^2 + b^2$.

1.8. Propiedades que se cumplen en un triángulo equilátero de lado *a*



1) El perímetro del triángulo o la longitud de su contorno es 3 a.

2) La altura del triángulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a.

3) El área del triángulo es $\frac{\sqrt{3}}{4}$ a^2.

4) El radio del círculo inscrito (aquel círculo que se puede dibujar dentro del triángulo tocando los tres lados de manera tangencial) es $\frac{\sqrt{3}}{6}$ a.

5) El radio del círculo circunscrito (aquel círculo que se puede dibujar por fuera del triángulo y que contiene los tres vértices) es $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a.

2. Ejercicios con solución

El objetivo de esta sección es recordar conceptos y técnicas matemáticas de manera eminentemente práctica, a partir de ejemplos concretos.

Ejercicio 1

Demostrad que si tenemos un triángulo rectángulo de lados 3 y 4 centímetros, la hipotenusa mide 5 centímetros.

Solución:

Dado que los catetos miden 3 y 4 centímetros, la hipotenusa tiene que hacer necesariamente 5 centímetros, puesto que se tiene que cumplir que $h^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, y el único número positivo que él por sí mismo da 25 es el número 5 (o bien $h = \sqrt{25} = 5$).

Ejercicio 2

Demostrad que si tenemos un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide 5 centímetros y uno de los lados mide 4 centímetros, el otro lado tiene que medir necesariamente 3 centímetros.

Solución:

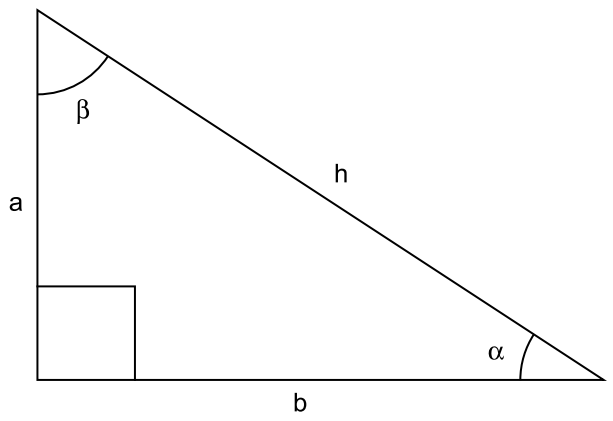
Observad que si de la ecuación $h^2 = a^2 + b^2$ aislamos uno de los lados, por ejemplo a, obtenemos $a^2 = h^2 - b^2$ (o bien $a = \sqrt{h^2 - b^2}$). Entonces, si conocemos la hipotenusa y un cateto, el otro cateto es muy fácil de encontrar: $a^2 = 25 - 16 = 9$ y entonces $a = 3$.

Ejercicio 3

Demostrad que la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 180º.

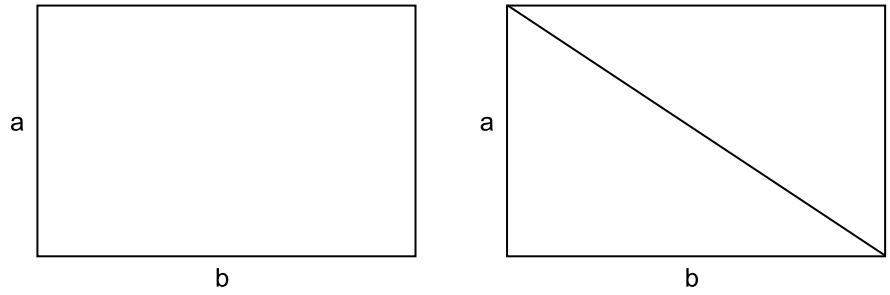
Demostración:

Dado un triángulo rectángulo tipo,

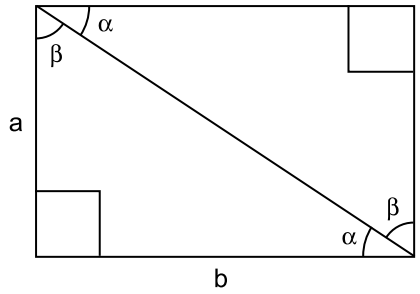


Para demostrar que los ángulos interiores de un triángulo rectángulo suman 180, solo hay que demostrar que $\alpha + \beta = 90$, puesto que al sumar a este valor el ángulo recto de 90, obtendremos 180.

Para ver que $\alpha + \beta = 90$, se divide un rectángulo de lados *a y b* por su diagonal.



Entonces obtenemos dos triángulos exactamente iguales al triángulo rectángulo de partida, que construyen el rectángulo de la manera siguiente:

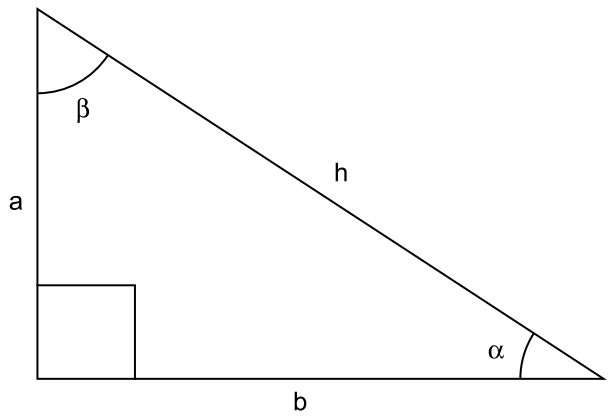


Y entonces $\alpha + \beta = 90$, puesto que todo ángulo interior de un rectángulo mide 90º.

Ejercicio 4

Encontrad el tercer ángulo de un triángulo si sabemos que uno de los ángulos es 60º y el otro es 90º.

Solución:



Sabemos que en todo triángulo rectángulo con los ángulos en grados se cumple que $\alpha + \beta = 90$.

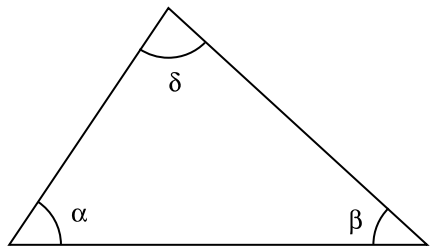
Dado que uno de los ángulos es 60, entonces el otro ángulo tiene que ser 30, puesto que 30 es el único número que cumple que su suma con 60 es 90.

Ejercicio 5

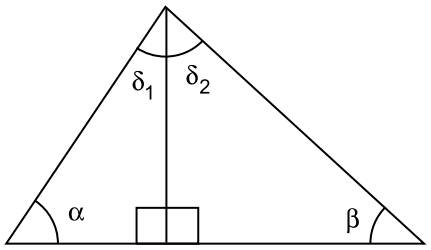
Demostrad que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º.

Solución:

Dado un triángulo cualquiera de ángulos α, β y δ como el representado a continuación,



se puede construir como suma de dos triángulos rectángulos siguiendo esta idea:



Observamos que $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Puesto que tenemos dos triángulos rectángulos, también sabemos que necesariamente $\alpha + \delta_1 = 90$ y $\beta + \delta_2 = 90$.

Entonces, $\alpha + \beta + \delta = \alpha + \beta + \delta_1 + \delta_2 = \alpha + \delta_1 + \beta + \delta_2 = 90 + 90 = 180$.

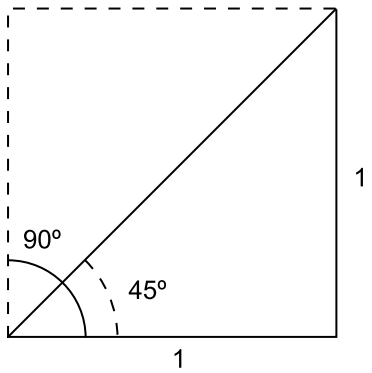
Ejercicio 6

Encontrad el seno, el coseno y la tangente del ángulo de 45º.

Solución:

Primero tenemos que construir un triángulo rectángulo con un ángulo de 45º.

A partir del dibujo de un cuadrado de lados 1 y 1, la diagonal partirá el cuadrado en dos triángulos rectángulos con ángulos de 45º.



Entonces, por Pitágoras su hipotenusa será $\sqrt{2}$.

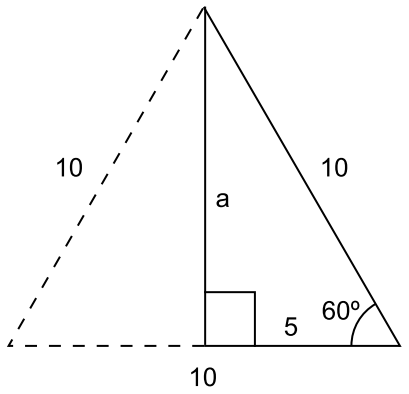
Por lo tanto, $\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\operatorname{tg} 45 = \frac{1}{1} = 1$ tal como se ha definido en la sección 1.5.

Podemos comprobar los resultados con una calculadora. Si no obtenemos estos valores es que la calculadora, para obtener el seno, el coseno y la tangente de un ángulo, está programada para obtenerlos a partir de un ángulo expresado en radianes en lugar de grados.

Ejercicio 7

Encontrad el seno, el coseno y la tangente del ángulo de 60º.

Primero tenemos que construir un triángulo rectángulo con un ángulo de 60º. La manera más sencilla es construirlo a partir de un triángulo equilátero (un triángulo con los tres lados iguales) de lado 10. Por simetría, sabemos que si lo partimos por la mitad tal y como muestra el dibujo siguiente, la hipotenusa mide 10 y uno de los lados, 5.



Teniendo en cuenta que los tres ángulos interiores de un equilátero tienen que ser iguales y que la suma de los tres es 180, cada ángulo de un equilátero es 60.

Por la fórmula de Pitágoras, podemos obtener el lado que nos falta en el triángulo y que hemos denotado a. Entonces $a^2 = 100 - 25$ y, por lo tanto, $a = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

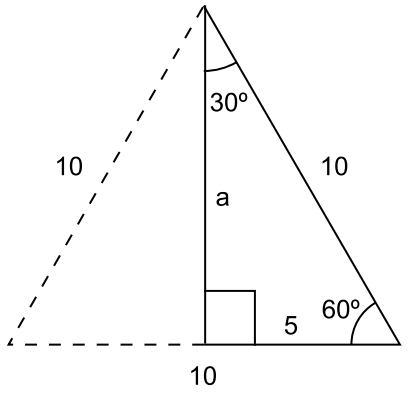
Entonces, $\sin 60 = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ y $tg\ 60 = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$.

Ejercicio 8

Encontrad el seno, el coseno y la tangente del ángulo de 30º.

Solución:

A partir del mismo dibujo del ejercicio anterior, el otro ángulo interior del rectángulo tiene que ser 30.



Entonces, $\sin 30 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\cos 30 = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $tg\ 30 = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Podemos comprobar los resultados con una calculadora.

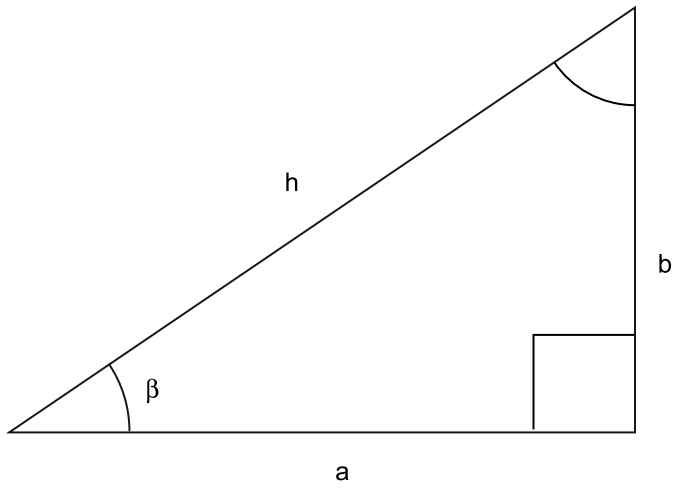
Ejercicio 9

Tomando dos triángulos parecidos, comprobad que el valor del seno, el coseno y la tangente de uno de los ángulos no depende de la medida de los triángulos.

Solución:

Dos triángulos son **parecidos** si tienen los mismos ángulos interiores.

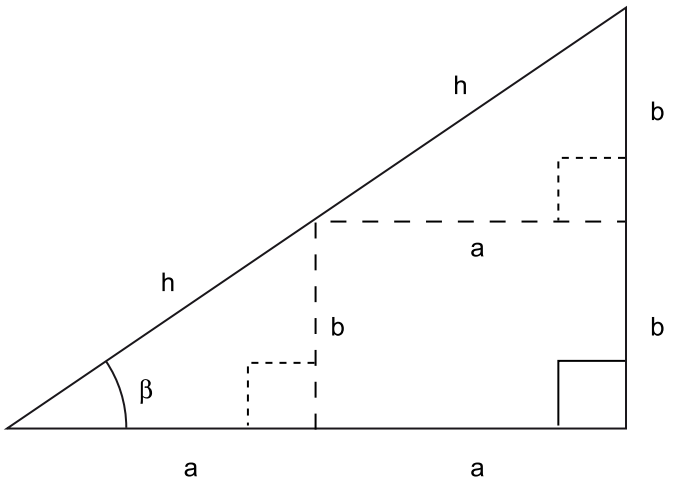
Partimos de un triángulo rectángulo cualquiera. Por ejemplo, el del dibujo siguiente:



Entonces sabemos que, por definición:

$$\sin\beta = \frac{b}{h} \quad \cos\beta = \frac{a}{h} \quad tg\,\beta = \frac{b}{a}$$

A partir del triángulo anterior, se construye un triángulo con el doble de la base y el doble de la altura, tal y como muestra el dibujo siguiente. El triángulo tiene los mismos ángulos interiores y, por lo tanto, es parecido al primero.



Entonces, si construimos el seno, el coseno y la tangente del mismo ángulo β con las nuevas medidas de los lados que acabamos de encontrar, obtenemos:

$\sin\beta = \frac{b+b}{h+h} = \frac{2b}{2h} = \frac{b}{h}$, valor que coincide exactamente con el seno de β del otro triángulo.

$\cos\beta = \frac{a+a}{h+h} = \frac{2a}{2h} = \frac{a}{h}$, valor que vuelve a coincidir con el coseno de β del otro triángulo.

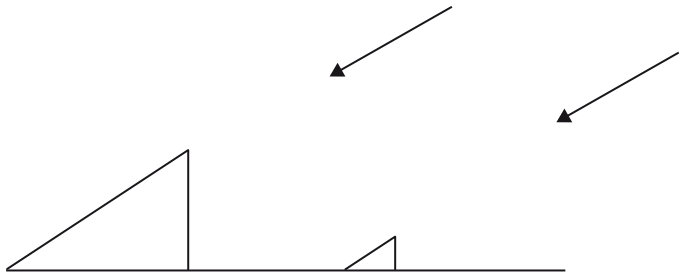
$tg\,\beta = \frac{b+b}{a+a} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$, valor que coincide exactamente con la tangente de β anterior.

Ejercicio 10

Calculad la altura de un árbol que hace una sombra de 15 m a la misma hora que un letrero de 2 m hace una sombra de 2 m.

Solución:

Puesto que los rayos del sol se están proyectando con el mismo ángulo a una hora dada, los triángulos rectángulos formados por los objetos y su sombra son proporcionales.



Tal y como ya sabemos, el seno, el coseno y la tangente de los ángulos internos de cada triángulo coinciden.

Entonces, si denominamos x la altura del edificio en metros, debe pasar que al tener el mismo valor de tangente $\frac{x}{15} = \frac{2}{2}$.

Por lo tanto, si aislamos x obtenemos que $x = 15$ metros.

Si pensamos un poco, deduciremos que el ángulo tiene que ser de 45º, puesto que si los lados son iguales (2 y 2) entonces tenemos la mitad de un cuadrado. De este modo, la altura del árbol debe ser, obviamente, 15 metros.

Ejercicio 11

Explicad la utilidad de la circunferencia goniométrica.

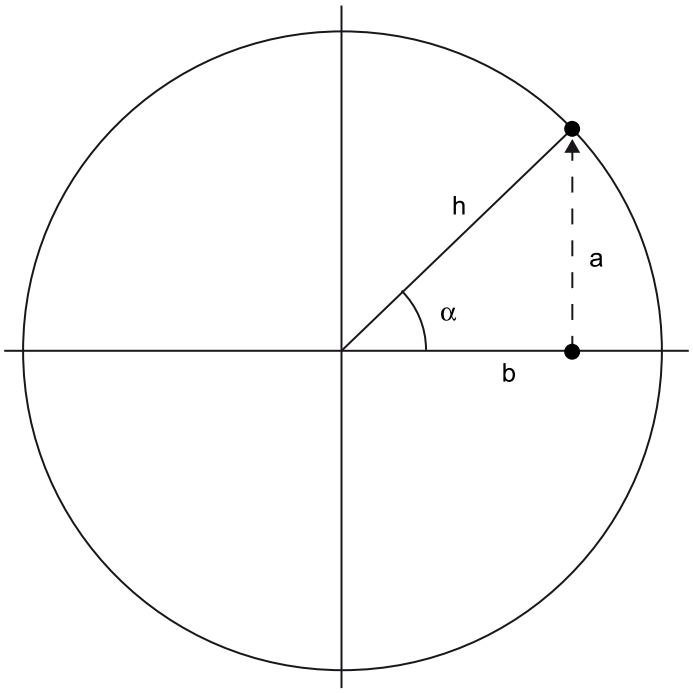
Ejemplo

Nota
La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio 1.

Solución:

La circunferencia goniométrica permite determinar muy fácilmente el seno y el coseno de un ángulo, solo midiendo distancias.

Observemos, por ejemplo,



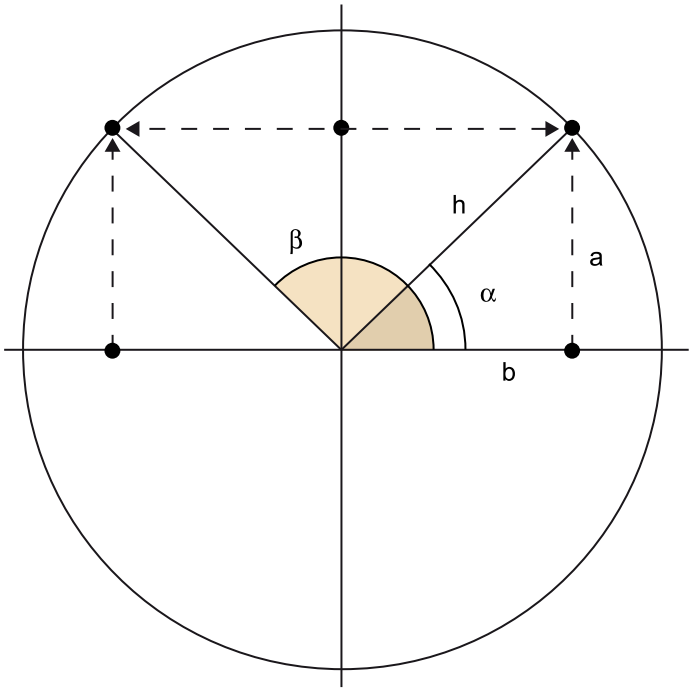
Dado que el radio es 1, la hipotenusa tiene que ser 1.

Entonces $\sin \alpha = \frac{a}{1} = a$ y $\cos \alpha = \frac{b}{1} = b$.

Con una regla de medir, si medimos *b* y *a,* encontramos el valor del seno y el coseno de este ángulo.

Si elegimos un ángulo mayor que 90, podemos utilizar la comparación de triángulos siguiente para encontrar el seno y el coseno de este nuevo triángulo.

Por ejemplo, con la construcción siguiente:



podemos deducir que $\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$ y $\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$.

Con construcciones parecidas, podemos encontrar el seno y el coseno de cualquier ángulo entre 0º y 360º.

Dado que a partir de 360º volvemos a iniciar la circunferencia, es evidente que $\sin(360+\alpha)=\sin\alpha$ y que $\cos(360+\alpha)=\cos\alpha$.

Observad que, por convenio, el ángulo siempre se mide en sentido contrario a las agujas del reloj empezando por las 3 de la tarde.

Ejercicio 12

Reducid al primer giro los ángulos siguientes:

a) 390°
b) 2.500^{o}

Solución:

a) $390^{o} = 360^{o} + 30^{o}$. Entonces, el ángulo de 390° es el ángulo de 30°.

b) Dado que:

$$\begin{array}{r|l} 2.500 & 360 \\ \hline 340 & 6 \end{array}$$

por la regla de comprobación de la división sabemos que $2.500^{o} = 360^{o} \cdot 6 + 340^{o}$. Es decir, para obtener el ángulo de 2.500º hay que dar 6 vueltas completas a la circunferencia goniométrica y avanzar 340º más.

De este modo, $2.500^{o} = 340^{o}$.

Ejercicio 13

Expresad en radianes las medidas de los ángulos siguientes:

a) 30°

b) 40°

c) 122°

d) 150°

e) 310°

Solución:

a) $30\,^{o} \cdot \frac{\pi\ radiants}{180\,^{o}} = \frac{\pi}{6}\ radiants$

b) $40\,^{o} \cdot \frac{\pi\ radiants}{180\,^{o}} = \frac{2\pi}{9}\ radiants$

c) $122\,^{o} \cdot \frac{\pi\ radiants}{180\,^{o}} = \frac{61\pi}{90}\ radiants$

d) $150\,^{o} \cdot \frac{\pi\ radiants}{180\,^{o}} = \frac{5\pi}{6}\ radiants$

e) $310\,^{o} \cdot \frac{\pi\ radiants}{180\,^{o}} = \frac{31\pi}{18}\ radiants$

Ejercicio 14

Expresad en grados sexagesimales los ángulos siguientes:

a) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{9\pi}{2}$ rad

d) $\frac{6\pi}{5}$ rad

Solución:

a) $\frac{\pi}{2}\ rad \cdot \frac{180\,^{o}}{\pi\ radiants} = 90\,^{o}$

b) $\frac{3\pi}{4}\ rad \cdot \frac{180\,^{\circ}}{\pi\ radiants} = 135\,^{\circ}$

c) $\frac{9\pi}{2}\ rad \cdot \frac{180\,^{\circ}}{\pi\ radiants} = 810\,^{\circ}$

d) $\frac{6\pi}{5}\ rad \cdot \frac{180\,^{\circ}}{\pi\ radiants} = 216\,^{\circ}$

Ejercicio 15

Utilizad la calculadora para obtener el seno, el coseno y la tangente de los ángulos siguientes:

a) $\frac{8\pi}{6}$ rad
b) 420

Solución:

a) Si la calculadora hace los cálculos en radianes, como π = 3,14159..., hay que hacer:

Seno (4,18...) = –0,866025403784438646767372317075294

Coseno (4,18...) = –0,5

Tangente (4,18...) = 1,732050807568877293527446341505 9

Si la calculadora hace los cálculos en grados, dado que en grados el ángulo es 240, hacemos:

Seno (240) = –0,866025403784438646767372317075294

Coseno (240) = –0,5

Tangente (240) = 1,732050807568877293527446341505 9

b) Si la calculadora lleva a cabo los cálculos en radianes, puesto que π = 3,14159..., hay que hacer:

Seno (7,33037666...) = 0,866...

Coseno (7,33037666...) = 0,5

Tangente (7,33037666...) = 1,73...

Si la calculadora efectúa los cálculos en grados, hay que hacer:

Seno (420) = 0,866...

Coseno (420) = 0,5

Tangente (420) = 1,73...

Nota

El ángulo de 420 es lo mismo que dar una vuelta (360) y sumarle 60. Por lo tanto, también podemos hacerlo como:

Seno (60) = 0,866...

Coseno (60) = 0,5

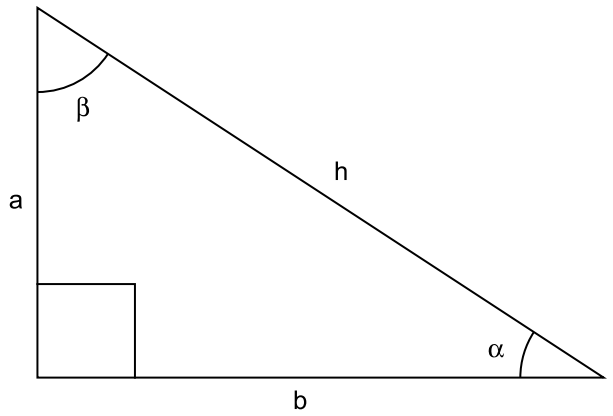
Tangente (60) = 1,73...

Nota

Para saber si la calculadora o el programa informático están en grados o en radianes, calculamos $tg\,45$. Si está en grados, deberíamos obtener $tg\,45 = 1$. Si en lugar de 1 obtenemos 1,61977519054386154998279 65..., quiere decir que está en radianes.

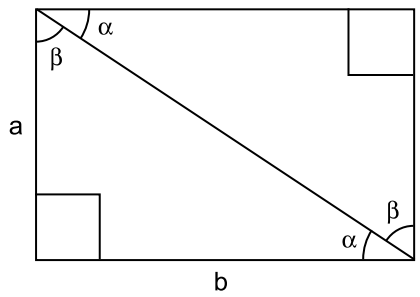
Ejercicio 16

Demostrad que el área de un triángulo rectángulo del tipo siguiente es $\frac{a \cdot b}{2}$.



Solución:

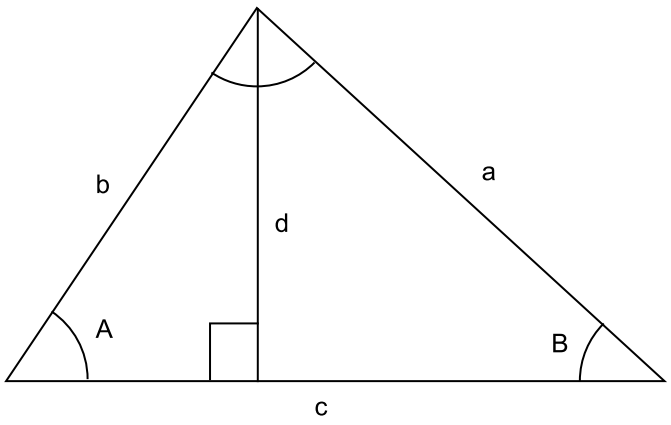
Sabemos que el área del rectángulo siguiente es $a \cdot b$.



Dado que contiene exactamente dos triángulos iguales, el área de uno tiene que ser $\frac{a \cdot b}{2}$.

Ejercicio 17

Demostrad que el área de un triángulo del tipo siguiente es $\frac{c \cdot d}{2}$.

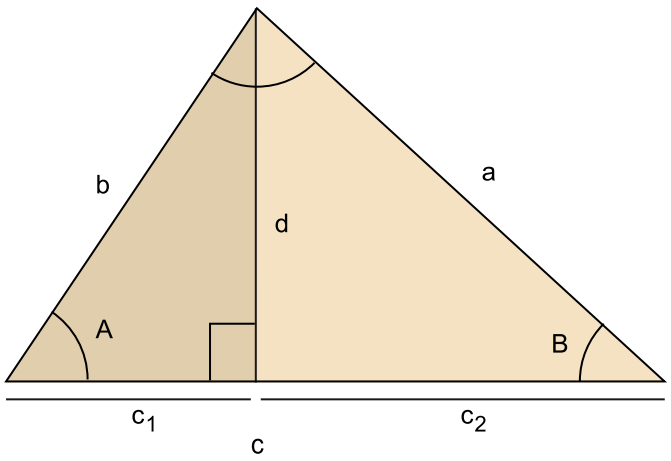


Nota

Es habitual, en vez de utilizar letras, decir que el área de un triángulo es la base por su altura dividido por 2. En el dibujo la base es *c*, la altura *d* y, por lo tanto, tenemos que demostrar que el área del triángulo es $\frac{c \cdot d}{2}$.

Solución:

A partir de la figura siguiente,



por el ejercicio anterior, y simplificando las fracciones, tenemos que el área del triángulo es $\frac{c_1 \cdot d}{2} + \frac{c_2 \cdot d}{2} = \frac{c_1 \cdot d + c_2 \cdot d}{2} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot d}{2} = \frac{c \cdot d}{2}$.

Nota

Una segunda manera de hacerlo consiste en ver que el área pedida es la mitad que la del rectángulo de lados *c* y *d*.

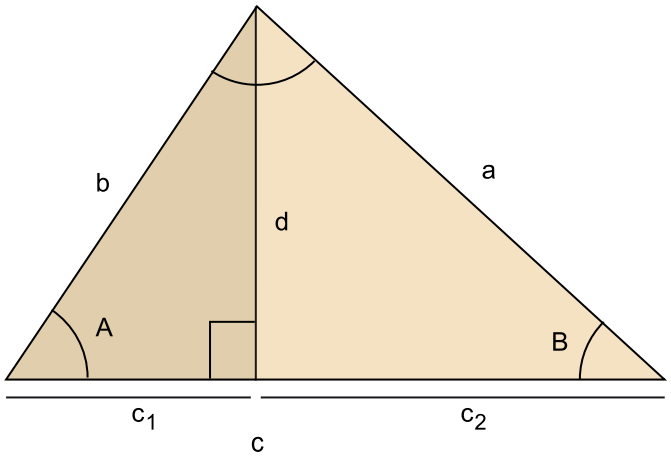
Ejercicio 18

Demostrad que en todo triángulo de lados *a, b* y *c* se cumple que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

Solución:

A partir de un dibujo tipo,



por el teorema de Pitágoras sabemos que $a^2 = d^2 + c_2{}^2$ y que $d^2 = b^2 - c_1{}^2$.

Ahora bien, puesto que $c_2 = c - c_1$ tenemos que $a^2 = d^2 + (c - c_1)^2 = b^2 - c_1{}^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_1 + c_1{}^2$ o lo que es lo mismo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_1$.

Sin embargo, así como también es cierto que $\cos A = \frac{c_1}{b}$, tenemos que $c_1 = b \cdot \cos A$.

Entonces $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$.

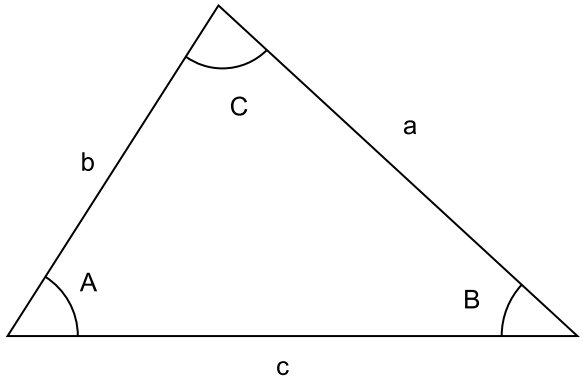
Nota

Esta fórmula puede servir para encontrar los ángulos de un triángulo si conocemos los tres lados.

Ejercicio 19

En un triángulo de lados $a = 7$ cm, $b = 5$ cm y $c = 8$ cm, encontrad los ángulos del triángulo.

Sabemos que todo triángulo del estilo



cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$.

Esta relación entre los lados y el ángulo del lado que está aislado a la izquierda permite encontrar en primer lugar el ángulo A.

De este modo, si aislamos cosA tenemos $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$.

Para encontrar el ángulo, utilizamos la función inversa coseno de la calculadora.

Dado que buscamos un ángulo tal que tenga por coseno el valor 0,5, hacemos:

A = `invcos`(0,5) = 60º

Teniendo en cuenta que con demostraciones similares a las del ejercicio anterior podemos demostrar también que $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$ y que $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$, tenemos suficientes fórmulas para encontrar los otros ángulos pedidos.

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{49 + 64 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$ y por lo tanto B = 38,2132107...º

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{49 + 25 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$ y por lo tanto C = 81,786789...º

Nota

Para comprobar que lo hemos hecho bien, se puede verificar que $A + B + C = 180^o$.

Ejercicio 20

El radio de las ruedas de un coche es 40 cm. Decid:

a) Cuántos metros recorre el coche si las ruedas dan 10 vueltas completas.

b) Qué ángulo tenemos que hacer girar las ruedas si el vehículo hace un recorrido de 80 cm. Dadlo en grados y en radianes.

c) Si al vehículo se le engancha un chicle en una de las ruedas y este recorre 0,4π metros (1,256 m), ¿a qué altura quedará el chicle del suelo?

Solución:

a) Este tipo de ejercicio sirve para dar realismo a una animación tipo juego. Las matemáticas nos permiten obtener el valor correcto.

La fórmula del perímetro de una circunferencia de radio r es $2\cdot \pi \cdot r$.

Esto quiere decir que si el radio es de un metro, una hormiga que caminase por el borde de la circunferencia goniométrica se desplazaría algo más de 6 metros. De manera equivalente, un coche con ruedas de 1 metro avanza 6 metros por cada vuelta que da la rueda.

En nuestro caso, al tener ruedas de 40 centímetros el coche se mueve por cada vuelta cerca de 251,3 cm, que es algo más de 2 metros y medio.

Puesto que la rueda da 10 vueltas completas, podemos calcular los metros que se ha movido el coche multiplicando la distancia que avanza el coche en un giro de rueda por 10:

$10*2*\pi*40 = 2513{,}27$ cm = 25,13 m

b) El arco de circunferencia se calcula con radianes. La idea es encontrar cuántas veces hay el radio en la distancia que se ha movido el coche (recordemos que, por definición, este número será el ángulo en radianes, puesto que la definición del ángulo en radianes es precisamente esto).

De este modo, α = 80 cm / 40 cm = 2 radianes.

Para convertirlo a grados sexagesimales, multiplicamos por el factor 180/π: 2 rad * 180º / π rad = 114,6º.

c) El ángulo de giro será ahora α $40 \cdot \pi / 40 = \pi$ rad.

Dado que π radianes es media vuelta o 180º, el chicle estará en la parte superior de la rueda, que representa una altura de 80 cm.