Teoría de números para diseño

Salvador Linares Mustarós

PID_00215906

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

Introducción..... 5

1. Tipos de números..... 7
1.1. Los números naturales 7
1.2. Los números enteros 7
1.3. Los números racionales 7
1.4. Los números irracionales 7
1.5. Los números reales 7
1.6. Los números algebraicos 9
1.7. Los números trascendentes 9

2. Ejercicios con solución..... 10

Introducción

Los números son construcciones de nuestro pensamiento. Es una noción que vamos construyendo desde la infancia a partir de comparar conjuntos de objetos.

Un símbolo es la representación de una idea de modo que esta idea puede ser percibida por alguno de nuestros sentidos.

Aquí tenemos un dibujo de una manzana. Un dibujo de una manzana no es una manzana, puesto que ni se puede comer ni huele igual. El dibujo es un símbolo, una especie de metáfora que permite evocar una idea de nuestra mente.

Los símbolos escritos 1, 2, 3 y 4, permiten evocar la idea de los números uno, dos, tres y cuatro.

Sin embargo, también los símbolos escritos *one*, 2.10^0, III y 3 + 1 permiten evocar la idea de los números uno, dos, tres y cuatro.

Como acabamos de ver, un mismo número puede ser designado por varios símbolos.

Dos símbolos o expresiones numéricas que evocan la misma idea de número se denominan símbolos o expresiones numéricas equivalentes.

La teoría de números que se va presentando a medida que se solucionan los ejercicios de la sección "Ejercicios con solución" tiene como objetivo principal presentar técnicas matemáticas que permitan obtener símbolos o expresiones numéricas equivalentes en un formato más simple. Para presentar estas técnicas, se trabajarán con los distintos tipos de números presentados en la siguiente sección.

El último ejercicio presenta una visión global y completa que permite ver en su totalidad todos los subconjuntos estudiados.

1. Tipos de números

1.1. Los números naturales

El conjunto de los números naturales está formado por todos aquellos números que se pueden utilizar para contar objetos parecidos de la naturaleza.

De este modo, el número 15 es un número natural, puesto que si tenemos juntas quince manzanas, obtenemos este número al contarlas.

1.2. Los números enteros

El conjunto de los números enteros es el conjunto que agrupa todos los números naturales con signo + o – y el 0. De esta manera, +3, –4 o –100 son números enteros.

1.3. Los números racionales

El conjunto de los números racionales es el que agrupa todos los números que se pueden escribir como división de dos enteros. De esta manera, +3/5, 4/–3 o 0/–100 son números racionales.

Los números racionales se pueden representar en formato decimal o de fracción. Por ejemplo, 1,5 se puede representar como 3/2.

1.4. Los números irracionales

El conjunto de los números irracionales es el que agrupa todos los números que no se pueden escribir como división de dos enteros. De este modo, $\sqrt{2}$, π o el número de oro son números irracionales.

1.5. Los números reales

El conjunto formado por todos los números anteriores se denomina conjunto de números reales y se suele identificar con una recta.

Es posible anotar números enteros por medio de potencias de diez. Esta notación se utiliza en números muy grandes o muy pequeños.

Los números cumplen ciertas propiedades que permiten simplificar expresiones donde aparecen operaciones de sumas, restas, multiplicación, división o combinaciones entre las mismas.

Las incógnitas son números reales desconocidos que se suelen encontrar haciendo sumas, restas, divisiones o multiplicaciones en expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es una agrupación con sentido de números, paréntesis y letras separados por los signos de las operaciones aritméticas.

De esta manera, $3x - 5$ es una expresión algebraica tal que al sustituir la x por el valor 4 se obtiene el valor numérico 7.

Cuando se tienen dos expresiones algebraicas separadas por un signo de igual, se puede comprobar qué sucede al sustituir las letras por valores. Si la igualdad de valores numéricos no es cierta para algún valor de las letras, diremos que tenemos una ecuación. Si la igualdad de valores numéricos es cierta al sustituir cualquier valor por las letras, diremos que tenemos una identidad.

Encontrar los valores de las incógnitas que cumplen una ecuación es uno de los ejercicios más habituales en matemáticas.

Dos ecuaciones con las mismas soluciones se denominan equivalentes.

Una de las grandes herramientas que conocemos para poder encontrar las soluciones de una ecuación es la conversión de una ecuación en otra ecuación equivalente más fácil de resolver a simple vista por medio de la simplificación, la suma, resta, multiplicación por un número diferente de 0 o división por un mismo número diferente de 0 en cada lado.

Toda ecuación del estilo $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ se denomina ecuación de segundo grado. Este tipo de ecuaciones tiene por solución los valores $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Buscar dos números reales que cumplen dos ecuaciones al mismo tiempo es otro de los ejercicios más típicos en matemáticas. Habitualmente, los encontraremos a partir de aislar una de las incógnitas de una ecuación, y sustituir la expresión algebraica que está igualada en la incógnita en la otra ecuación. Al haber eliminado una de las incógnitas, podemos resolver la ecuación con los métodos anteriores. Y al encontrar este valor, si sustituimos en la expresión algebraica que iguala la otra incógnita, obtendremos el valor de la segunda incógnita.

1.6. Los números algebraicos

Una ecuación de la forma $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ se denomina polinomio de grado n. Los números c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_2, c_1 y c_0 se denominan coeficientes del polinomio.

Por ejemplo, $3x^5 - 2x + 3 = 0$ es un polinomio de grado 5 con coeficientes enteros, 3, 0, 0, 0, –2 y 3.

Los números algebraicos son aquellos números que son solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. 2, –7, $\frac{1}{6}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{2}$ son números algebraicos.

1.7. Los números trascendentes

Los números trascendentes son aquellos que no son solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros.

Hay muy pocos números trascendentes conocidos. Demostrar que un número es trascendente puede ser extremadamente difícil.

π es un número trascendente.

2. Ejercicios con solución

El objetivo de esta sección es el de recordar conceptos y técnicas matemáticas de manera eminentemente práctica, a partir de ejemplos concretos.

Ejercicio 1

Calculad $3 + 2 \cdot (5 + 1)$.

Solución:

Dada una expresión que identifica un número natural con números y operadores de combinación como paréntesis, suma, resta, multiplicación o división, utilizaremos de manera iterativa la regla siguiente hasta obtener una expresión formada por un solo número.

Regla de la simplificación de una expresión en matemáticas:

1) En una expresión matemática en la que aparecen paréntesis, primero se deben eliminar los paréntesis.

2) En una expresión matemática sin paréntesis, primero se tienen que eliminar las multiplicaciones y divisiones.

3) En una expresión matemática sin paréntesis, multiplicaciones y divisiones, deben eliminarse las sumas y las restas.

Puesto que la expresión $3 + 2 \cdot (5 + 1)$ tiene paréntesis, al sustituir $(5 + 1)$ por el número que representa obtenemos la expresión equivalente $3 + 2 \cdot 6$.

Esta nueva expresión no tiene paréntesis, pero sí tiene una multiplicación. Al llevarla a cabo y sustituirla en la expresión, obtenemos la expresión equivalente $3 + 12$.

Finalmente, la expresión no tiene paréntesis ni multiplicaciones o divisiones. Puesto que tiene una suma, hay que calcularla. Entonces obtenemos la expresión numérica 15.

La regla nos asegura que la expresión numérica $3 + 2 \cdot (5 + 1)$ es el número 15.

Es muy interesante observar que la expresión inicial posee una estructura de muñeca rusa tipo matriushka, puesto que tiene números dentro de números.

La proporción áurea

Documental *Redes* de Eduard Punset:

http://www.youtube.com/watch?v=d_7i-uqz_ic

Ejercicio 2

Calculad $1 + 3^2 + (8 + 1) + (3 \cdot 2)$.

$1 + 3^2 + (8 + 1) + (3 \cdot 2) = 1 + 3^2 + 9 + 6 = 1 + 9 + 9 + 6 = 25$

Nota

¡Tened en cuenta que 3^2 es otra manera de decir $3 \cdot 3$!

Ejercicio 3

Calculad $1 + (3 + (2 + 5))$.

En este ejemplo, tenemos un paréntesis dentro de otro paréntesis. Puesto que primero se tienen que eliminar los paréntesis, podemos empezar sustituyendo el más interior por el valor que representa. De este modo, dado que $(2 + 5)$ representa el valor 7, el paréntesis exterior representa el valor $3 + 7 = 10$.

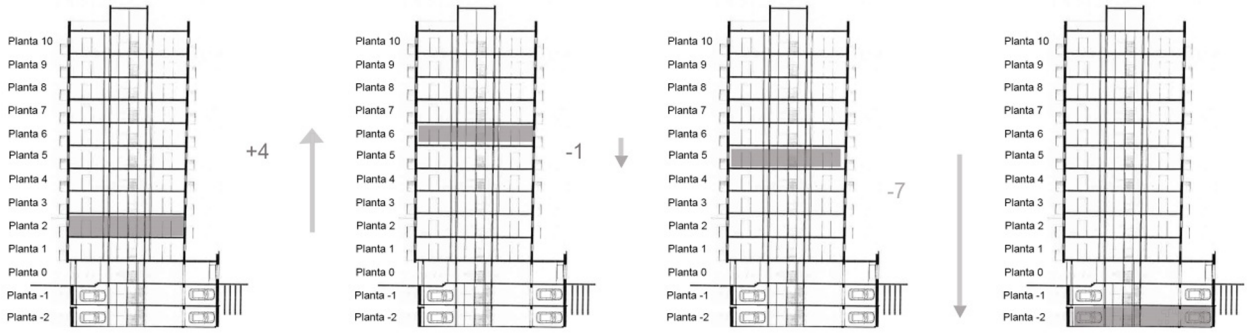
Por lo tanto, $1 + (3 + (2 + 5)) = 1 + 10 = 11$.

Ejercicio 4

Calculad $(+2) + (+4) + (-1) + (-7)$.

Resulta muy fácil visualizar las operaciones de suma con números enteros si pensamos que estamos en una planta de un edificio y los enteros positivos nos hacen subir y los enteros negativos nos hacen bajar.

De este modo, $(+2) + (+4) + (-1) + (-7) = -2$, puesto que de la segunda planta iremos a la sexta, ya que subimos 4 plantas, después iremos a la quinta y finalmente iremos a la planta –2, que se puede visualizar como la planta de un aparcamiento que está dos plantas por debajo de la planta baja.



Ejercicio 5

Calculad 2 + 4 + (–1) + (–3).

Suele ser habitual eliminar los paréntesis utilizando la regla de signos siguiente:

Regla de signos 1:

Dado un número natural *a,*

$$+(+a) = +a \qquad -(+a) = -a$$
$$+(-a) = -a \qquad -(-a) = +a$$

Por ejemplo, si tomamos $a = 7$

$$+(+7) = +7 \qquad -(+7) = -7$$
$$+(-7) = -7 \qquad -(-7) = +7$$

Entonces 2 + 4 + (–1) + (–3) = 2 + 4 – 1 – 3 = +2 (o igual a 2). Es muy interesante conocer el convenio que afirma que todo número entero positivo se puede escribir sin signo, de modo que se identifica con un número natural. Este convenio permite que el conjunto de números enteros contenga el conjunto de números naturales.

Ejercicio 6

Calculad (–2) · (–3) · (–2) – 3 + 15

Primero, como los paréntesis ya son expresiones de un solo número, no hay que operar nada dentro. Sin embargo, para eliminar la multiplicación de paréntesis hay que utilizar otra regla de signos.

Regla de signos 2:

Dados dos números naturales *a y b*

$$(+a)\cdot(+b) = a\cdot b \qquad (+a)\cdot(-b) = -(a\cdot b)$$
$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b \qquad (-a)\cdot(+b) = -(a\cdot b)$$

Por ejemplo, si tomamos $a = 2$ y $b = 3$

$$(+2)\cdot(+3) = +6 \qquad (+2)\cdot(-3) = -6$$
$$(-2)\cdot(-3) = +6 \qquad (-2)\cdot(+3) = -6$$

También hay que recordar que la multiplicación de números cumple la propiedad asociativa:

Propiedad asociativa de la multiplicación:

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

La propiedad asociativa nos asegura que $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Para saber el resultado con signo de $(-2) \cdot (-3) \cdot (-2)$, hay que pensar que negativo por negativo es positivo y que, entonces, este signo multiplicado por el otro negativo es negativo. De esta manera, $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$.

Entonces, $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) - 3 + 27 = -24 - 3 + 27 = 0$.

Nota

0 es el único número positivo y negativo al mismo tiempo, es decir, $-0 = +0 = 0$.

Dado que el número representado por el símbolo 0 puede considerarse como el número que corresponde a no contar ningún objeto, con frecuencia se considera como número natural. No os extrañéis, sin embargo, si encontráis algún libro de texto en el que el autor no considere el 0 como número natural. Es una cuestión de convenio.

Ejercicio 7

Discutid si las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{25}$ son equivalentes.

Solución:

Dos fracciones son equivalentes cuando representan el mismo número racional.

Hay tres maneras distintas de ver que las fracciones son equivalentes.

1) Comprobando que se puede pasar de una fracción a la otra multiplicando numerador y denominador de la primera por un mismo número.

2) Multiplicando en cruz las fracciones y comprobando que obtenemos el mismo número.

3) Representando gráficamente los dos números como partes de un mismo objeto y comprobando que la parte representada por cada número es la misma.

Comprobamos de las tres maneras que las fracciones son equivalentes.

1) Comprobando que se puede pasar de una fracción a la otra multiplicando numerador y denominador de la primera por un mismo número.

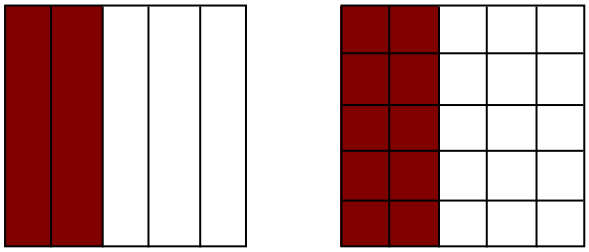
Dado que cuando multiplicamos el numerador y denominador de la primera por 5 llegamos a la segunda, las dos fracciones son equivalentes.

2) Multiplicando en cruz las fracciones y comprobando que obtenemos el mismo número.

De este modo, puesto que $2 \cdot 25$ es 50 y $5 \cdot 10$ también es 50, las dos fracciones son equivalentes.

3) Representando de manera gráfica los dos números como partes de un mismo objeto y comprobando que la parte representada por cada número es la misma.

En nuestro caso, al representar las dos fracciones en un cuadrado obtenemos la misma parte de la unidad, tal y como se ve en el dibujo siguiente:



Por consiguiente, $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{25}$ son dos representaciones en fracciones del mismo número racional.

Nota

Tened en cuenta que en matemáticas no hay ninguna fracción con denominador 0.

Ejercicio 8

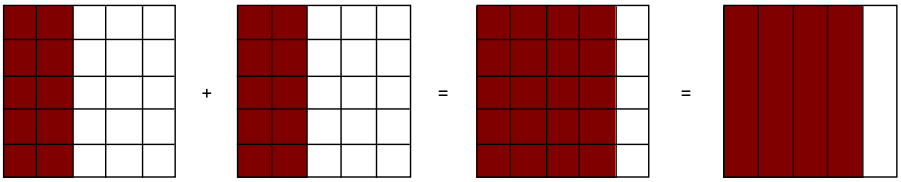
Encontrad el número racional simbolizado por: $\frac{10}{25} + \frac{10}{25}$.

Dado que tenemos el mismo denominador, con la regla de cálculo:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

El resultado es $\frac{10}{25} + \frac{10}{25} = \frac{10+10}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

Gráficamente, el ejercicio lo podríamos haber resuelto así:



Hay otras muchas maneras de hacer este ejercicio. Por ejemplo,

$$\frac{10}{25}+\frac{10}{25}=10\cdot\frac{1}{25}+10\cdot\frac{1}{25}=(10+10)\cdot\frac{1}{25}=20\cdot\frac{1}{25}=\frac{20}{25}=\frac{4\cdot 5}{5\cdot 5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{5}=\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4}{5}$$

Observad que para entender esta manera hay que conocer ciertas reglas para operar con números racionales y ciertas propiedades de las operaciones. Recordemos algunas:

$$a+0=a \qquad a\cdot 1=a$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$$

$$a\cdot b+c\cdot b=(a+c)\cdot b \qquad a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejercicio 9

Demostrad de manera analítica y geométrica la expresión:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$$

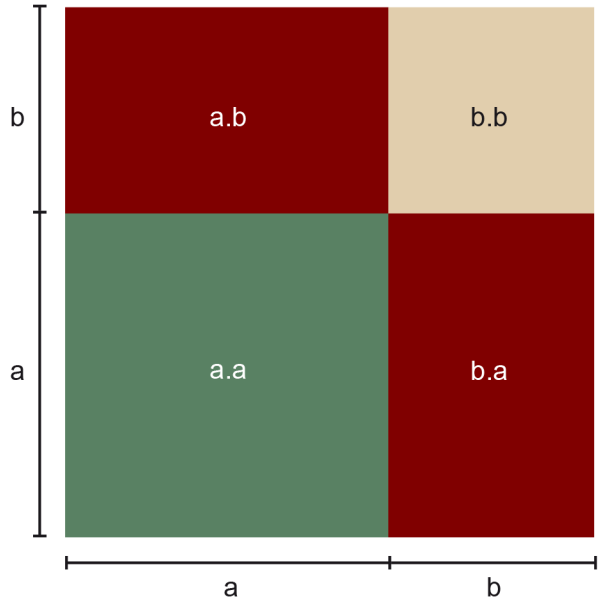
Solución:

Analíticamente:

$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2+b^2+a\cdot b+b\cdot a$
$=a^2+b^2+a\cdot b+a\cdot b=a^2+b^2+2\cdot \mathrm{a}\cdot \mathrm{b}$

Geométricamente:

El cuadrado siguiente tiene como lados $(a+b)$ y $(a+b)$. Su área es $(a+b)^2$. Sin embargo, el área también la podemos romper como $a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$. La igualdad del área nos permite deducir que $(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$.



Nota

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 - a \cdot b - b \cdot a =$

$= a\ 2 + b^2 - a \cdot b - a \cdot b = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$

Ejercicio 10

Calculad:

a) 3^3
b) $3^2 \cdot 3^3$
c) $3^5 : 3^3$
d) 3^1
e) 3^0
f) $(3^3)^3$

Solución:

a) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) $3^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ (Observad que entonces $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.)

c) $3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{1} = 3^2 = 9$ (Observad que entonces $a^b : a^c = a^{b-c}$.)

d) $3^1 = \frac{3^2}{3^1} = \frac{9}{3} = 3$ (Observad que entonces todo número elevado a 1 es el mismo.)

e) $3^0 = \frac{3^2}{3^2} = \frac{9}{9} = 1$ (Observad que entonces todo número elevado a 0 es el mismo.)

f) $(3^3)^3 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = 3^9$ (Observad que entonces $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$)

Por tanto, tenemos las reglas:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^b \cdot a^c = a^{b-c}$

$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

Ejercicio 11

Calculad la suma siguiente: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

Solución:

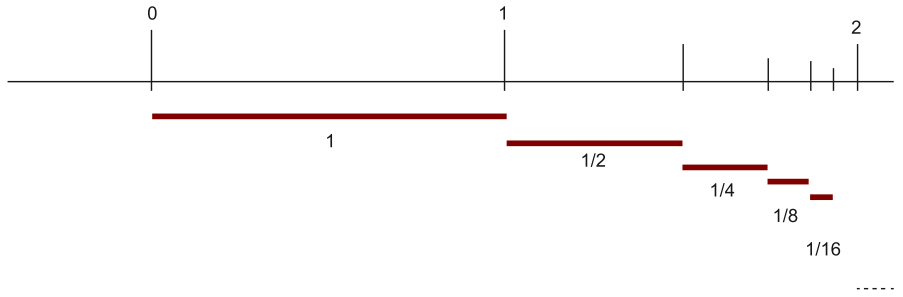
Por convenio, el símbolo $\sum$, llamado *sumatorio*, se lee como suma de números. La letra *i* nos indica que a medida que vamos poniendo el símbolo +, tenemos que cambiar la *i* por un número entero empezando por el 0 y acabando por el infinito.

De este modo, $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots$, etc. Siempre podemos ir jugando con los números de la *i* para representar otros muchos tipos de suma. De este modo, por ejemplo, $1 + 2 + 3 + 4 = \sum_{i=1}^{4} i$.

Entonces, dado que todo número elevado a 0 es 1 y que todo número elevado a 1 es el mismo, tenemos:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \qquad (1)$$

Esta suma la podemos representar en la recta real para ver que la suma de todos estos números es el número 2.



Observemos que cada número que sumamos es la mitad del anterior (o el anterior · 0,5) y que entonces siempre sumamos la mitad de la distancia que nos falta para llegar a 2. Por lo tanto, por mucho que vayamos sumando y sumando nunca llegaremos a 2. Sin embargo, puesto que vamos sumando y sumando mitades, nunca nos detendremos antes de llegar al 2. De este modo,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2 \qquad (2)$$

La fórmula que suma infinitos términos del estilo a, $a \cdot r$, $a \cdot r^2$, ... es:
$a+a\cdot r+a\cdot r^2+a\cdot r^3+a\cdot r^4+\ldots=\frac{a}{1-r}$

Observad que aplicando esta fórmula con $r = 0,5$ y $a = 1$ obtenemos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1+1\cdot 0,5+1\cdot 0,5^2+1\cdot 0,5^3+1\cdot 0,5^4+\ldots=\frac{1}{1-0,5}=\frac{1}{0,5}=2 \qquad (3)$$

Tal como debe ser.

Ejercicio 12

Demostrad que el número decimal periódico $9,\widehat{9}$ es una representación del número 10.

Solución:

Queremos ver que 9,9999999999999... = 10.

Observad que podemos escribir el número $9,\widehat{9}$ como una suma de infinitos números de la manera siguiente:

9,9999999999999... = 9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + ... = $9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots$.

Observad que cada número del sumatorio se obtiene como el anterior dividido por 10.

Denominamos *S* la suma siguiente:

$$S = 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots \qquad (4)$$

Si dividimos por 10 en cada lado, obtenemos:

$$\frac{S}{10} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots \qquad (5)$$

Entonces,

$$S - \frac{S}{10} = \left(9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots\right) - \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots\right) \qquad (6)$$

y por lo tanto,

$$S - \frac{S}{10} = 9 \qquad (7)$$

Si ahora multiplicamos por 10 en los dos lados obtenemos:

$10S\text{-}S = 90$, o simplificando $9S = 90$ y, por lo tanto, $S = 10$, tal y como queríamos demostrar.

Nota:

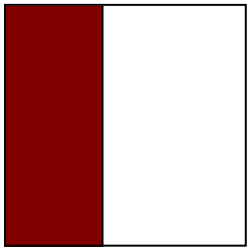
También se puede realizar con la fórmula $\frac{a}{1 - r}$ tomando a = 9 y r = 0,1.

Ejercicio 13

Encontrad el número racional simbolizado por: $\frac{2}{5} + \frac{1}{25}$.

Solución:

En este ejercicio, vemos la utilidad de encontrar distintas representaciones para el mismo número racional. En el ejercicio 6, hemos visto que $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{25}$ son dos representaciones del mismo concepto de número racional que nuestra mente asocia a la parte sombreada del total en el dibujo siguiente:



Entonces:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{25} = \frac{10}{25} + \frac{1}{25} = \frac{11}{25}$$

Del hecho de que 11 y 25 no tienen divisores comunes, podemos deducir que no se puede encontrar ninguna fracción equivalente simplificada.

Ejercicio 14

Encontrad el número racional simbolizado por: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1+1}{2} = \frac{4}{2} = \frac{2.2}{2.1} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1 \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

Cuando trabajamos con expresiones de números racionales, hay que convenir que todo número entero se puede escribir como un número racional tal que tiene como numerador el número y, como denominador, el número natural 1. De este modo, por ejemplo, $2 = \frac{2}{1}$. Este convenio nos permite afirmar que los números racionales contienen los números enteros.

Ejercicio 15

Encontrad el número racional simbolizado por: $\frac{1}{8} + \frac{-3}{-8}$.

Una regla muy útil cuando trabajamos con números racionales es la siguiente: podemos cambiar los dos signos de los números numeradores y denominadores con la finalidad de que el denominador siempre sea positivo. Es decir, $\frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$.

Entonces, $\frac{1}{8} + \frac{-3}{-8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$.

Observemos que dado que tenemos divisores comunes a 4 y 8, sabemos que dividiendo cada número por uno de los divisores encontraremos fracciones simplificadas. De este modo, si dividimos por 2 numerador y denominador obtenemos otra fracción equivalente a la primera. Ahora bien, por convenio

siempre dividiremos por el máximo común divisor y así encontraremos la fracción más simplificada posible. En el caso de este ejercicio, hemos dividido numerador y denominador por 4 y así obtenemos que $\frac{1}{8} + \frac{-3}{-8} = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 16

Encontrad el número racional simbolizado por:

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{-8}$$

Otra regla fundamental para trabajar con racionales es la que afirma que todo número racional siempre puede ser escrito como:± división de dos naturales. La regla afirma:

Regla de signos 3

Dados dos números naturales *a y b*,

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \qquad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

A partir de este hecho, podemos aplicar las mismas reglas de signos 1 y 2 con números racionales en lugar de números enteros. Por ejemplo,

$$\frac{-1}{-2} \cdot \frac{3}{-4} = \left[+\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left[-\left(\frac{3}{4}\right)\right] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)\right] = -\frac{3}{4}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{-8} = \frac{1}{8} - \left[-\left(\frac{4}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$$

Ejercicio 17

Expresad en notación decimal los números racionales referenciados en las fracciones siguientes:

a) $\frac{4}{2}$
b) $\frac{63}{20}$
c) $\frac{31257}{99}$

d) $\frac{312740478}{990000}$

Solución:

Toda fracción se puede expresar siempre con un número decimal limitado o ilimitado periódico. Si hacemos la división, obtenemos unos cocientes en forma decimal. Este cociente es la representación del número racional en formato decimal. De esta manera:

a) $\frac{4}{2} = 2$. En este caso, se dice que $\frac{4}{2}$ admite una **representación decimal limitada o exacta** en forma de número entero.

b) $\frac{63}{20} = 3.15$. En este caso, se dice que $\frac{63}{20}$ admite una representación decimal limitada o exacta con dos cifras decimales y parte entera 3.

c) $\frac{31257}{99} = 315.7272727272\ldots = 315.\overline{72}$. En este caso, se dice que $\frac{31257}{99}$ admite una **representación decimal ilimitada periódica pura** con parte entera 315 y un periodo de dos cifras.

d) $\frac{312740478}{990000} = 315.8994727272727272\ldots = 315.8994\overline{72}$. En este caso, se dice que $\frac{312740478}{990000}$ admite una **representación decimal ilimitada periódica mixta** con parte entera 315 y un periodo de dos cifras.

Nota importante

¡No hay un convenio único para la expresión de decimales! A veces se utiliza punto, y a veces se utiliza coma. En el uso de cualquier software, el lector debe tener en cuenta este detalle para no trabajar de manera incorrecta con las cantidades numéricas con decimales. Por ejemplo, en Flash se tiene que trabajar con puntos para representar decimales.

Ejercicio 18

Expresad en fracción los números racionales referenciados en la forma decimal siguiente:

a) 5
b) 1.52
c) $315.\overline{72}$
d) $3.8994\overline{735}$

Solución:

Todo decimal limitado o ilimitado periódico se puede expresar siempre en forma de fracción. Para encontrar una fracción que represente el número decimal, hay unos procedimientos mecánicos muy simples de aprender.

1) Procedimiento si el número es una representación decimal limitada o exacta en forma de número entero:

Dado que todo número entero se puede escribir en forma de fracción con denominador el número 1, pondremos el número dividido por 1.

2) Procedimiento si el número es una representación decimal limitada o exacta con una cifra decimal o varias:

Podemos escribirlo en forma de racional como el número sin la coma dividido por un 1 seguido de tantos ceros como dígitos hay detrás de la coma.

3) Procedimiento si el número es una representación decimal ilimitada periódica pura:

Como denominador, ponemos el número sin coma hasta donde acaba el periodo menos el número hasta donde empieza el periodo. Por denominador, ponemos tantos nueves como dígitos tenga el periodo.

4) Procedimiento si el número es una representación decimal ilimitada periódica mixta:

Como denominador, ponemos el número sin coma hasta donde acaba el periodo menos el número sin coma hasta donde empieza el periodo. Por denominador, ponemos tantos nueves como dígitos tenga el periodo seguidos por tantos ceros como dígitos haya entre la coma y el periodo.

Siguiendo el procedimiento 1,

$$5 = \frac{5}{1}$$

Siguiendo el procedimiento 2,

$$1.52 = \frac{152}{100}$$

Siguiendo el procedimiento 3,

$$315.\overline{72} = \frac{31572 - 315}{99} = \frac{31257}{99}$$

Finalmente, siguiendo el procedimiento 4,

$$3.8994\overline{735} = \frac{38994735 - 38994}{9990000} = \frac{38955741}{9990000}.$$

Ejercicio 19

Expresad en forma de fracción irreducible los números racionales referenciados en la forma decimal siguiente:

a) 5
b) 1.52

c) $315.\overline{72}$

Solución:

Un número racional se puede escribir como una infinidad de fracciones diferentes, puesto que solo hay que multiplicar o dividir numerador y denominador por un mismo número. De este modo, $\frac{152}{100} = \frac{304}{200} = \frac{608}{400} = \frac{1520}{1000} = \ldots$

Se dice que un número racional está expresado en su **fracción irreducible** cuando se tiene una expresión del tipo $\frac{a}{b}$ en la que *a* y *b* no tienen ningún divisor común excepto el 1.

Todo número racional distinto de cero tiene una y solo una expresión en fracción irreducible con denominador positivo. Esta representación es la que se utiliza habitualmente para presentar resultados finales.

Por consiguiente, con la teoría anterior la solución del ejercicio es:

a) $5 = \frac{5}{1}$ y dado que MCD(1,5) = 1, ya tenemos la fracción irreducible.

b) Sabemos que $1.52 = \frac{152}{100}$. Si dividimos numerador y denominador por el máximo común divisor de los dos números, obtenemos siempre la fracción irreducible equivalente.

Para encontrar el MCD de dos números, empezaremos escribiendo cada número como producto de primos.

Recordad que un **número primo** es aquel número que solo es divisible por sí mismo y por el número 1. Un ejemplo de número primo es el número 2. Un ejemplo de número que no es primo lo encontramos en el número 6, puesto que se puede dividir además de por 6 y por 1, por 2 y por 3.

Dado que 100 = 2 · 2 · 5 · 5 y que 152 = 2 · 2 · 2 · 19, vemos que los números que se repiten en las dos descomposiciones son 2 · 2. De este modo, el MCD de los dos números es 2 · 2 = 4.

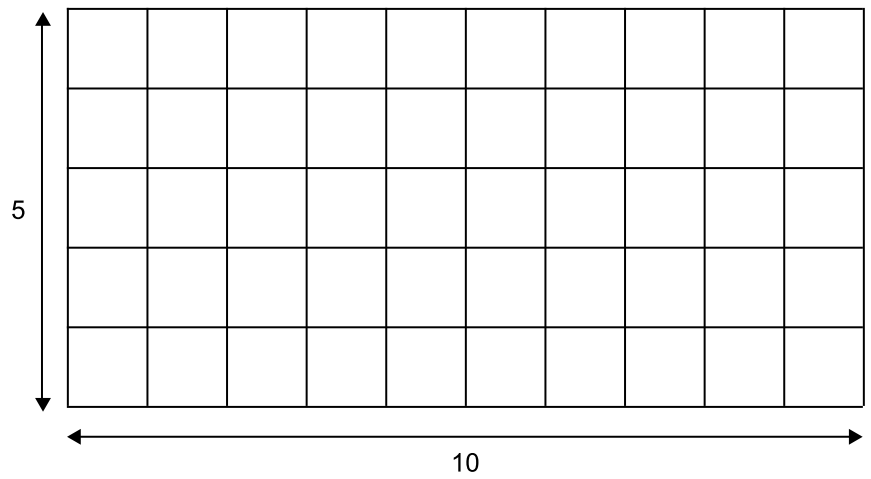
Dado que $1.52 = \frac{152}{100}$ y que MCD(152,100) = 4, la fracción irreducible es $\frac{38}{25}$.

c) Otra forma de encontrar la fracción irreducible es ir dividiendo numerador y denominador por un mismo número hasta que encontremos que ningún número que divide uno puede ya dividir el otro. Por ejemplo, $315.\overline{72} = \frac{31257}{99} = \frac{10419}{33} = \frac{3473}{11}$.

Observad que primero hemos dividido numerador y denominador por 3, puesto que el 3 divide el 99 y el 31257. Después hemos vuelto a dividir por 3, puesto que el 3 divide el 33 y el 10419 al mismo tiempo. Finalmente, puesto que el único número que divide el denominador es el 11 y el 11 no divide el numerador, ya no podemos continuar simplificando y, por lo tanto, hemos llegado a la fracción irreducible.

Ejercicio 20

Explicad qué significa que el rectángulo siguiente de lados de 5 y 10 unidades tenga un área de 50.



Solución:

Observad que tenemos un rectángulo de lados de 5 y 10 unidades. El área de un rectángulo se define como la multiplicación de la base y la altura (en el caso de que el rectángulo sea un cuadrado, el área es el lado al cuadrado). Un área de $5 \cdot 10 = 50$ quiere decir que necesitamos 50 cuadrados de tamaño 1 x 1 para embaldosar toda la superficie del rectángulo. El área, pues, nos dice la cantidad de cuadraditos de tamaño 1 x 1 necesarios para construir la figura.

Ejercicio 21

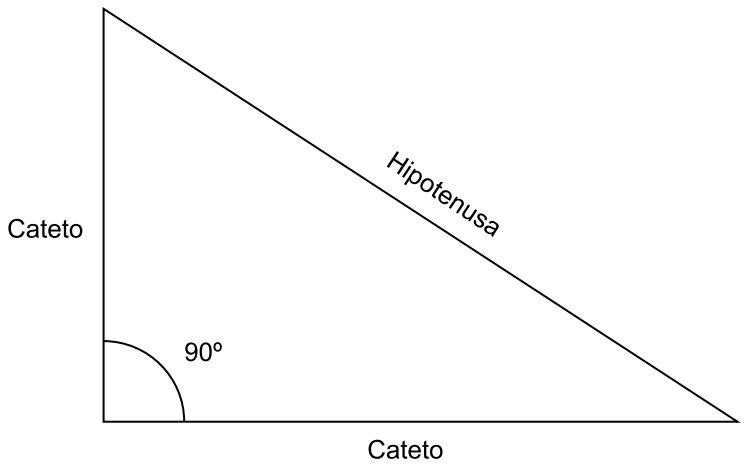
Explicad el significado geométrico del teorema de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^2 + \text{cateto}_2^2$$

Solución:

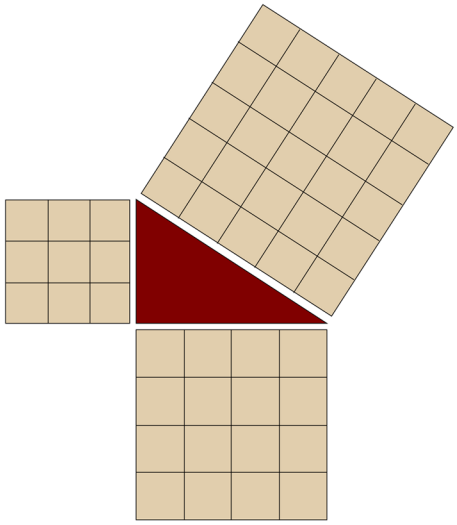
Recordemos que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90º.

En un triángulo rectángulo los lados adjuntos al ángulo de 90º se denominan catetos, y el lado enfrentado al ángulo de 90º, hipotenusa.



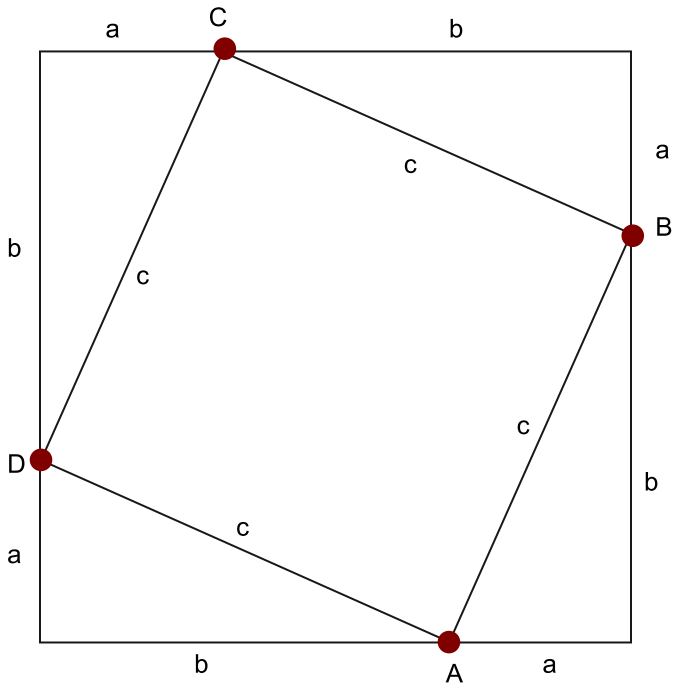
El teorema de Pitágoras afirma que el área del cuadrado formado con la hipotenusa coincide con la suma de las áreas de los cuadrados formados con los lados.

Por ejemplo, si los catetos miden 3 y 4 centímetros, la hipotenusa tiene que medir necesariamente 5 centímetros, puesto que se tiene que cumplir que $h^2 = 3^2 + 4^2$.



Ejercicio 22

Demostrad el teorema de Pitágoras utilizando el dibujo siguiente:



Solución:

Observemos que si igualamos las áreas, obtenemos $c^2 + 2 \cdot a \cdot b = (a + b)^2$.

Entonces $c^2 + 2 \cdot a \cdot b = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$, con lo que se deduce que $c^2 = a^2 + b^2$.

Ejercicio 23

Expresad en notación decimal los números siguientes:

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt{1}$

c) $\sqrt{0}$

d) $\sqrt{400}$

e) $\sqrt[3]{125}$

f) $\sqrt{5}$

Solución:

Por convenio, dados dos números a i b positivos, diremos que $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si es cierto que $b^n = a$. En el caso particular $n = 2$, $\sqrt{a} = b$ si y solo si es cierto que $b^2 = a$.

a) $\sqrt{4}$ es el número 2, puesto que 2 es el único número positivo que multiplicado por sí mismo da 4.

b) $\sqrt{1}$ es el número 1, puesto que 1 es el único número positivo que multiplicado por sí mismo da 1.

c) $\sqrt{0}$ es el número 0, puesto que 0 es el único número positivo que multiplicado por sí mismo da 0.

d) $\sqrt{400} = 20$, puesto que 20 es el único número positivo que multiplicado por sí mismo da 400.

e) $\sqrt[3]{125} = 5$, puesto que 5 es el único número positivo que multiplicado por sí mismo y multiplicado por sí mismo da 125.

f) $\sqrt{5} = ???$. Observemos que lo que podemos asegurar es que no se trata de 2, puesto que 2 por 2 da 4 y no 5. También podemos asegurar que no es 3, puesto que 3 por 3 da 9 y no 5. Parece evidente que el número que buscamos está entre 2 y 3. Esto nos asegura que la parte entera del número $\sqrt{5}$ es 2.

Dado que 2,2 por 2,2 da 4,84, y que 2,3 por 2,3 da 5,29, el número que buscamos se encuentra entre 2,2 y 2,3.

Dado que 2,23 por 2,23 da 4,9729, y que 2,24 por 2,24 da 5,0176, el número que buscamos se encuentra entre 2,23 y 2,24.

Dado que 2,236 por 2,236 da 4,999696, y que 2,237 por 2,237 da 5,004169, el número que buscamos se encuentra entre 2,236 y 2,237. De momento, tenemos seguro que las dos primeras cifras decimales del número son 2 y 3.

Por lo tanto, de momento $\sqrt{5} = 2{,}23\ldots$.

Al aplicar esta técnica una vez tras otra, comprobamos que obtenemos el número decimal $\sqrt{5} = 2{,}236067977499789696409173668731\ldots$.

Ejercicio 24

¿Es el número $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997896964091736687 31\ldots$ un número racional? Es decir, ¿se puede escribir de la forma $\frac{a}{b}$ con a y *b* números naturales?

Solución:

> Los números irracionales son aquellos números que no se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$ con a y *b* números enteros.
>
> Una característica que identifica los números no racionales es que tienen forma de número decimal ilimitado no periódico.

Todos los números con expresión $\sqrt{p}$ con *p* un número primo son irracionales.

De este modo, $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997896964091736687 31\ldots$ es un número irracional si aceptamos la afirmación anterior.

π, e, $\log_2 3$ y el número de oro ϕ también son números irracionales.

Demostrar que un número no es racional resulta complicado, y el estudio de las técnicas para hacerlo va mucho más allá de las técnicas que se presentan en este curso de matemáticas.

A pesar de que se trata de una tarea muy complicada, la comprensión de una demostración de este estilo es altamente satisfactoria. Esta es la razón por la que la dejaremos escrita a continuación. Quizá algún día os querréis atrever.

En el caso concreto que nos ocupa, veremos la demostración de que $\sqrt{5}$ no es racional con un argumento que se denomina *reductio ad absurdum*. La idea es muy simple, pero el argumento es de una belleza tan extrema que tiene dedicado un anexo en el magnífico libro de Carl Sagan *Cosmos*.

La idea de la reducción al absurdo es que al principio se suponga una cosa y, cuando con reglas validadas y demostradas se llegue a una situación imposible e inaceptable por nadie, entonces se concluya que lo que hemos supuesto al principio es completamente falso y tiene que pasar necesariamente lo contrario al supuesto de partida.

Como supuesto inicial, supondremos que $\sqrt{5}$ es un número racional.

Dado que suponemos que $\sqrt{5}$ es un número racional, este número se puede escribir en forma de fracción irreducible tipo $\frac{a}{b}$ con *a* y *b* números naturales. Dado que hemos elegido la fracción irreducible, sabemos que obligatoriamente MCD(*a*,*b*) = 1, es decir, no puede haber ningún número distinto de 1 que divida al mismo tiempo los números *a* y *b*.

Puesto que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, entonces sabemos que $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 5$, o lo que es lo mismo, $a^2 = 5 \cdot b^2$.

Entonces, puesto que en el lado derecho sale un 5, *a* debe ser un múltiplo de 5, puesto que si su descomposición en forma de primos no contiene el número 5, no podríamos tener un lado múltiplo de 5 y el otro no múltiplo de 5 y decir que tenemos el mismo número.

Entonces, podemos suponer que $a = 5 \cdot k$.

De este modo, $a^2 = 5 \cdot b^2$ es lo mismo que $25 \cdot k^2 = 5 \cdot b^2$ o bien $5 \cdot k^2 = b^2$.

Entonces, puesto que en lado izquierdo sale el 5, *b* tiene que ser un múltiplo de 5.

Aquí acabamos de llegar a un hecho imposible, puesto que MCD(*a*,*b*) = 1, ¡y acabamos de ver que el 5 divide *a y* el 5 divide *b*!

Llegar a un hecho imposible indica que el supuesto de partida es incorrecto. Por lo tanto, $\sqrt{5}$ no es un número racional, puesto que si lo fuera llegaríamos a un hecho inaceptable.

¡Demostrar que ciertos números no son racionales es uno de los grandes divertimentos de los matemáticos!

Hay demostraciones preciosas como la que demuestra que el número *e* no es racional. ¡Si hacéis un recorrido per la web, encontraréis muchas más!

Ejercicio 25

Cuando pedimos $\sqrt{5}$ a una calculadora, una hoja de cálculo tipo Excel o un programa informático tipo Flash, nos ofrecen un valor numérico para la expresión tipo 2,23606797749979. ¿Es este valor el valor real de la expresión $\sqrt{5}$?

Solución:

No. Siempre es una aproximación. De hecho, dado que 2,23606797749979 $= \frac{223606797749979}{100000000000000}$ es un número racional, si fuera el valor exacto, $\sqrt{5}$ sería racional, y tal y como hemos visto en el ejercicio anterior, ¡$\sqrt{5}$ no es racional!

Ejercicio 26

¿Es posible obtener la expresión decimal exacta del número representado por $\sqrt{5}$?

Solución:

No. Es imposible que ninguna máquina nos pueda ofrecer los infinitos dígitos del número $\sqrt{5}$, puesto que necesitaría un tiempo infinito para calcularlos. Sin embargo, sí es posible obtener una representación mental exacta del valor $\sqrt{5}$.

Por ejemplo, si utilizamos el teorema de Pitágoras con lados 1 y 2, la hipotenusa mide exactamente el valor $\sqrt{5}$.

Ejercicio 27

Simplificad los números racionales siguientes:

a) $\sqrt{8}$
b) $\sqrt[3]{54}$
c) $\sqrt{72}$
d) $\frac{\sqrt{18}}{2}$
e) $\frac{3}{\sqrt{18}}$

Solución:

Una de las propiedades más útiles para simplificar ecuaciones es la siguiente:

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

En el caso particular $n = 2$,

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$$

La segunda propiedad que hay que tener presente es que:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$

a) $\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 2}=2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{72}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 2}=2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

d) $\frac{5\sqrt{18}}{2}=\frac{5\sqrt{3^2\cdot 2}}{2}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{3}{\sqrt{3^2\cdot 2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 28

Expresad en forma de notación científica los números reales siguientes:

a) 5 320 000
b) 0.0000023

Solución:

La notación científica es una manera cómoda de representar un número muy grande o muy pequeño utilizando potencias de base diez.

De este modo:

a) 5 320 000 = $5.32\cdot 10^6$

Observad que si el número es grande, se escribe con un solo decimal seguido de un 10 elevado a tantos dígitos como números hay tras la primera cifra. De esta manera, puesto que detrás del 5 hay 6 dígitos, el 10 tiene que estar elevado a 6.

b) 0.0000023 = $2.3\cdot 10^{-6}$

Observad que si el número es pequeño, se escribe el número que empieza después de los ceros con un solo decimal seguido de un 10 elevado a tantos dígitos ceros como haya antes del de la izquierda con signo negativo. De este modo, dado que tenemos 6 ceros hasta el 2, el 10 tiene que estar elevado a –6.

Ejercicio 29

Expresad en forma de número decimal los números reales siguientes expresados en notación científica:

a) $6{,}3\cdot 10^8$
b) $2{,}315\cdot 10^{-4}$

Solución:

La idea que hay tras la notación científica es que siempre que multiplicamos por 10 se mueve la coma hacia la derecha, y siempre que dividimos por 10 se mueve la coma hacia la izquierda. Recordemos, además, que un negativo en el exponente es un convenio que el 10 elevado al exponente está dividiendo.

De este modo, $6{,}3 \cdot 10^8 = 630\,000\,000$ y $2{,}315 \cdot 10^{-4} = 0{,}0002315$.

Ejercicio 30

Representad en una recta horizontal los puntos 0, 1, 2, 3, –1, –2, –3, $\frac{1}{2}$, –2.8 y $\sqrt{2}$.

Solución:

> Una recta es un objeto geométrico de nuestra mente formado por un conjunto de infinitos puntos infinitamente largo e infinitamente delgado y que no tiene ningún tipo de curvatura.

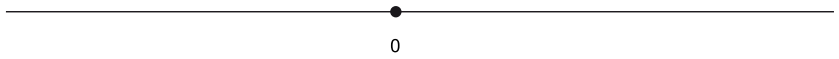
Cuando representamos la recta, solo somos capaces de hacer una aproximación a esta idea.

Dado que nunca se puede representar la idea de recta como objeto infinitamente largo, lo que haremos es suponer que el trozo de recta que dibujamos se puede alargar por los dos extremos hasta el infinito.

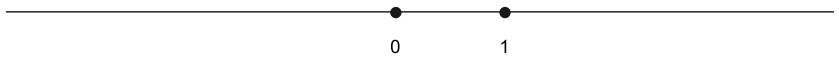
Puesto que si fuera infinitamente delgada nuestros ojos no la verían, nos imaginaremos que cuando la representemos con un lápiz o con el ordenador mediante los píxeles el grosor del dibujo es 0.

Si aceptamos estos hechos, no tenemos problemas para que nuestro cerebro interprete el dibujo siguiente como un objeto geométrico ideal conocido como recta.

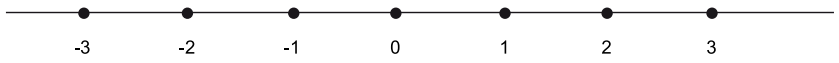
Para representar el 0 en la recta, elegimos un punto cualquiera de esta recta.



Para representar el 1, elegimos un punto cualquiera en el lado derecho del cero. Tened en cuenta que esto es por convenio. Ponemos los positivos normalmente a la derecha, pero no tiene por qué ser así.

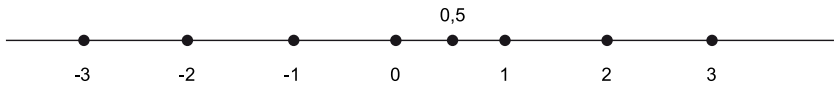


Una vez asignado el 0 y el 1, todos los enteros quedan determinados. El 2, por ejemplo, tiene que estar a la misma distancia del 1 que el 1 del 0. El –1 debe estar a la misma distancia que el 1 del 0, pero a la izquierda del 0. Y de este modo vamos encontrando la representación de los enteros.

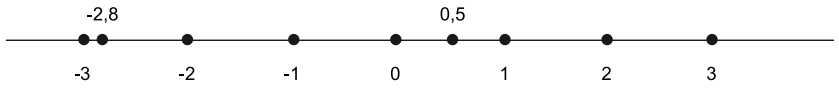


La representación del número $\frac{1}{2}$ se encuentra a medio camino entre el 0 y el 1, puesto que dividimos la unidad en dos partes y tomamos una.

En la práctica, sin embargo, se suele hacer dividiendo la unidad en 10 partes y tomando 5, puesto que $5 \cdot \frac{1}{10} = 5 \cdot 0 \,.\, 1 = 0.5 = \frac{1}{2}$.

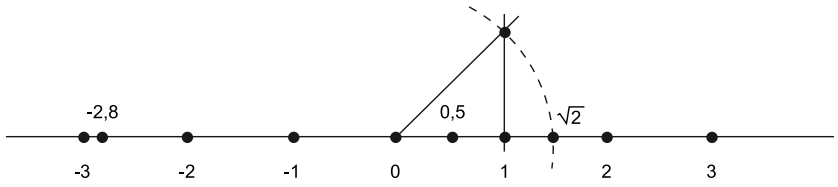


Podemos representar directamente –2,8 dividiendo en 10 partes la unidad que va de –2 a – 3 y tomando 8 de las mismas.



Finalmente, para representar $\sqrt{2}$ podemos utilizar a Pitágoras con un triángulo rectángulo de lados 1 y 1. El tamaño de la hipotenusa es el número $\sqrt{2}$. Con un compás, podemos marcar el número sobre la recta siguiendo la idea del dibujo siguiente.

De todos modos, en la práctica, dado que $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, dividimos el segmento que va de 1 a 2 en 10 partes y marcamos algo más de 4 partes.



Ejercicio 31

Explicad qué números forman parte de los conjuntos de números siguientes:

a) $1 \leq x \leq 5$ o [1,5]
b) $1 \leq x < 5$ o [1,5)
c) $1 < x \leq 5$
d) $1 < x < 5$
e) $\mathbb{Z}$
f) $\mathbb{R}$

Solución:

Recordad que la expresión *a a* < b simboliza que *a* es menor que *b*, y la expresión a ≤ b simboliza que *a* es menor o igual que *b*.

a) Aquí encontramos todos los números reales desde el 1 hasta el 5, los dos incluidos. Observad que los corchetes cerrados indican que los números de los extremos del intervalo pertenecen al conjunto.

b) Aquí encontramos todos los números reales desde el 1 hasta el 5, con el 1 incluido pero el 5, no.

c) Aquí encontramos todos los números reales desde el 1 hasta el 5, con el 5 incluido pero el 1, no.

d) Aquí encontramos todos los números reales desde el 1 hasta el 5, pero ni el 1 ni el 5 están incluidos.

e) En $\mathbb{Z}$ tenemos todos los números enteros.

f) En $\mathbb{R}$ tenemos todos los números reales.

Ejercicio 32

Justificad si las igualdades de expresiones algebraicas siguientes son ecuaciones o identidades:

a) $3x - 5 = x - 1$
b) $x + 1 = x + 1$

Solución:

Si sustituimos la x por 4 en la expresión $3x - 5 = x - 3$, obtenemos en la primera expresión algebraica el valor numérico 7, y en la segunda, 1. Puesto que hemos encontrado valores de las letras por los que la igualdad no es cierta, podemos decir que tenemos una ecuación.

Si sustituimos la x por cualquier número en la expresión $x + 1 = x + 1$, obtenemos tanto en la primera expresión algebraica como en la segunda el mismo valor numérico. Dado que no podemos encontrar valores que al ser sustitutos de las letras la igualdad no sea cierta, podemos decir entonces que tenemos una identidad.

Ejercicio 33

Averiguad si las ecuaciones siguientes son equivalentes:

a) $x - 1 = 4$ y $x = 4 + 1$
b) $3 \cdot x = 12$ y $x = \frac{12}{3}$
c) $x + 1 = 2$ y $x^2 = 1$

Solución:

Las ecuaciones $x - 1 = 4$ y $x = 4 + 1$ son equivalentes, puesto que las dos tienen como única solución el número 3.

Las ecuaciones $3 \cdot x = 12$ y $x = \frac{12}{3}$ son equivalentes, puesto que las dos tienen como única solución el número 4.

Las ecuaciones $x + 1 = 2$ y $x^2 = 1$ no son equivalentes, puesto que la primera solo tiene como única solución el número 1, mientras que la segunda tiene dos soluciones, el número 1 y el número –1.

Ejercicio 34

Encontrad la solución de la ecuación siguiente: $3x - 2x - 1 = 3 + 2$.

Solución:

En lugar de buscar las soluciones de la ecuación $3x - 2x - 1 = 3 + 2$, buscaremos la solución de la ecuación $3x - 2x = 1 + 3 + 2$, que es equivalente a la anterior puesto que solo hemos sumado 1 a cada lado. Y en lugar de encontrar la solución de $3x - 2x = 1 + 3 + 2$, buscaremos las de la ecuación simplificada $x = 6$, en la que, y de un solo vistazo, podemos ver que tiene como única solución el número 6. De este modo, al encontrar la solución de la ecuación equivalente $x = 6$ hemos encontrado la solución de la ecuación $3x - 2x - 1 = 3 + 2$. Se puede comprobar que hemos encontrado el valor correctamente con el hecho de que al sustituir la x de la ecuación inicial por el valor 6, obtenemos en los dos lados el mismo valor numérico: $3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1 = 18 - 12 - 1 = 5$ y $3 + 2 = 5$ en el otro.

Ejercicio 35

Encontrad las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + x - 20 = 0$
b) $x^2 = 20 - x$
c) $-x^2 - x + 20 = 0$
d) $2x^2 + 2x - 40 = 0$
e) $x \cdot (x + 1) = 20$
f) $(x + 5)(x - 4) = 0$

Solución:

a) De la ecuación $x^2 + x - 20 = 0$, tomando $a = 1, b = 1\ i\ c = -20$, obtenemos las soluciones $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \frac{-1+9 \quad ; \quad -1-9}{2} = \frac{8 \quad ; \quad -10}{2} = 4;\ -5$, según se explica en la sección 1.5.

Comprobamos, por lo tanto, que 4 es solución: $4^2 + 4 - 20 = 16 + 4 - 20 = 20 - 20 = 0$.

Comprobamos ahora que –5 también es solución: $(-5)^2 + (-5) - 20 = 25 - 5 - 20 = 25 - 25 = 0$.

b) $x^2 = 20 - x$ es una ecuación equivalente a una ecuación de la forma $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Concretamente, en la ecuación $x^2 + x - 20 = 0$. Por el apartado a) ya sabemos que las soluciones de esta son los valores 4 y –5.

c) $-x^2 - x + 20 = 0$ es una ecuación de segundo grado. Si tomamos $a = -1, b = -1$ *i* $c = 20$,, obtenemos las soluciones 4 y –5. Sin embargo, una segunda manera de hacer este ejercicio consiste en cambiar los signos y obtener la ecuación equivalente del apartado a).

d) $2x^2 + 2x - 40 = 0$ es una ecuación de segundo grado. Si tomamos $a = 2, b = 2$ *i* $c = -40$, obtenemos las soluciones 4 y –5. Una segunda forma, no obstante, de hacer este ejercicio es dividir los dos lados por 2, con lo que obtenemos la ecuación equivalente del apartado a).

e) $x \cdot (x + 1) = 20$ es una ecuación equivalente a la ecuación $x^2 + x = 20$, que al mismo tiempo es equivalente a la ecuación del apartado a). Por lo tanto, las soluciones son los valores 4 y –5.

f) $(x + 5)(x - 4) = 0$ es una ecuación equivalente a la ecuación $x^2 + 5x - 4x - 20 = 0$, ecuación equivalente a la ecuación del apartado a). Por lo tanto, las soluciones también son los valores 4 y –5. Una segunda manera mucho más rápida de hacer este ejercicio consiste en buscar directamente cuándo $(x + 5)$ es 0, o cuándo $(x - 4)$ es 0. Del primer caso obtenemos la solución –5. Del segundo, obtenemos la solución 4.

Ejercicio 36

Demostrad que las ecuaciones $a x^2 + b x + c = 0$ y $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son equivalentes.

Solución:

Multiplicando por $2a$ la ecuación $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, obtenemos la ecuación equivalente $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$. Si sumamos a los dos lados b, obtenemos la ecuación equivalente $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$. Si elevamos al cuadrado los dos lados, sabemos que la igualdad se debe mantener. De este modo, $(2ax + b)^2 = \left(\pm\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2$. Si desarrollamos el cuadrado, y dado que positivo o negativo al cuadrado siempre es positivo, obtenemos la ecuación: $4a\ 2x^2 + b^2 + 4abx = b^2 - 4ac$. Si restamos b^2 y sumamos $4ac$ en los dos lados, obtenemos la ecuación $4a\ 2x^2 + 4abx + 4ac = 0$. Si extraemos factor común $4a$, obtenemos $4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$. Puesto que a debe ser diferente de 0, ya que si no, no tendríamos una ecuación de segundo grado, podemos dividir por $4a$ (¡recordad que en matemáticas está completamente prohibido dividir por 0!) en los dos lados para obtener la ecuación equivalente: $ax^2 + bx + c = 0$.

Ya que hemos pasado de una de las ecuaciones a la otra con transformaciones que respetan la equivalencia de las ecuaciones, tenemos que las dos ecuaciones son equivalentes y que, por lo tanto, si conocemos las soluciones de una conoceremos las soluciones de la otra.

Dado que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ tiene como soluciones los valores $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la ecuación $a x^2 + b x + c = 0$ tiene como soluciones los valores $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejercicio 37

Encontrad las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x - 2 = 0$
b) $x + 7 = 0$
c) $2x - 5 = 0$
d) $x^2 - 5 = 0$
e) $x^3 - 2 = 0$

Solución:

a) $x - 2 = 0$ tiene como solución el número natural 2.

b) $x + 7 = 0$ tiene como solución el número entero –7.

c) $6x - 1 = 0$ tiene como solución el número racional $\frac{1}{6}$.

d) $x^2 - 5 = 0$ tiene como soluciones los números irracionales $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$.

e) $x^3 - 2 = 0$ tiene como solución el número irracional $\sqrt[3]{2}$.

El hecho de que estos números sean solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros permite afirmar que 2, –7, $\frac{1}{6}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{2}$ son números algebraicos, tal como se ha definido en la sección 1.6.

Ejercicio 38

Resolved el sistema siguiente: $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$.

Solución:

De la segunda ecuación, tenemos que $x = 2 + 2y$.

Entonces, en la primera ecuación sustituimos la x por la expresión $2 + 2y$. Por convenio, pondremos entre paréntesis la expresión aunque en ciertos casos concretos quizá no sería necesario.

De este modo, tenemos que $2 \cdot (2 + 2y) + 3y = 11$ o lo que es lo mismo, $4 + 4y + 3y = 11$. Si restamos 4 en los dos lados, obtenemos la ecuación equivalente: $4y + 3y = 11 - 4$, que simplificando es $7y = 7$, la cual tiene como solución $y = 1$. Dado que $x = 2 + 2y$ e y es 1, x necesariamente es 4.

Ejercicio 39

Demostrad que todos los números naturales, enteros, racionales y algunos números que contienen raíces son números algebraicos.

Solución:

Si n es un número natural, n es algebraico, puesto que la ecuación $x - n = 0$ tiene como solución el número n.

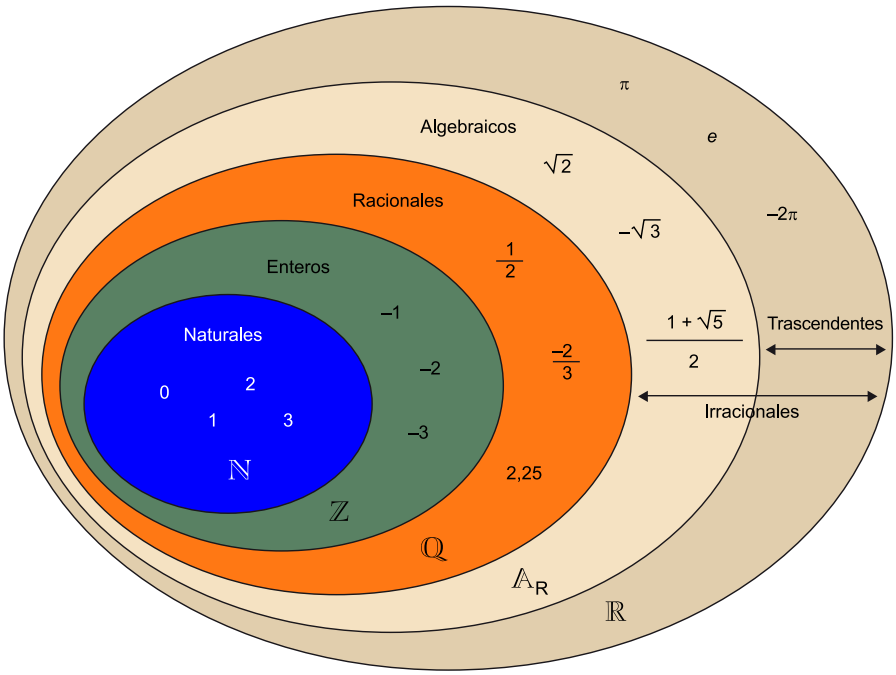
Si z es un número natural, z es algebraico, puesto que la ecuación $x - z = 0$ tiene como solución el número z.

Si $r = a/b$ es un número racional, r es algebraico, puesto que la ecuación $ax - b = 0$ tiene como solución el número r.

Todo número del estilo $+\sqrt{p}$ o $-\sqrt{p}$ con p primo es un número algebraico, puesto que la ecuación $x^2 - p = 0$ tiene como soluciones los números $+\sqrt{p}$ y $-\sqrt{p}$.

Ejercicio 40

Explicad el dibujo siguiente:



Solución:

El dibujo es una representación de los distintos subconjuntos de números estudiados hasta ahora. Tiene una estructura tipo muñeca rusa que permite entender el porqué de todos los ejercicios trabajados.

En el óvalo más pequeño encontramos el conjunto de los números naturales con algunos ejemplos de números naturales, como por ejemplo el 0, el 1, el 2 y el 3. Una $\mathbb{N}$ denota este conjunto. Observamos que el 0 es considerado aquí como número natural.

El conjunto de los enteros es denotado por $\mathbb{Z}$. En la imagen, es posible observar claramente que el óvalo de $\mathbb{N}$ es una parte incluida dentro del óvalo de $\mathbb{Z}$. Recordemos que, por convenio, todo número natural es al mismo tiempo un número entero. Fuera del óvalo de los naturales pero dentro del óvalo de los números enteros, encontramos los ejemplos de números enteros negativos, –1, –2 y –3.

El conjunto de los racionales es denotado por $\mathbb{Q}$. En la imagen también es posible observar claramente que el óvalo de los enteros es una parte incluida dentro del óvalo de los racionales. Recordemos que, por convenio, ya sabíamos que todo número entero es un número racional cuyo divisor es el número 1.

Los ejemplos elegidos como números racionales que no son enteros son ½, –2/3 y 2,25. El hecho de poner un decimal permite recordar que todo número racional también se puede escribir en forma de decimal limitado o ilimitado periódico.

El conjunto siguiente que incluye los racionales es el conjunto de los números algebraicos. En un ejercicio anterior ya hemos visto que los racionales son números algebraicos y que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{3}$ son números algebraicos. El otro número se denomina número áureo. En los apuntes de la asignatura, se demostrará que este también es un número algebraico. El símbolo que los denota es $\mathbb{A}_R$.

Como ejemplos de números trascendentes, encontramos los números π, e y -2π.

Estos tres números, junto con ½, –2/3 y 2,25, son los ejemplos de números irracionales, es decir, aquellos que no se pueden escribir en forma *de* a/b con a y b enteros.

Finalmente, encontramos que el óvalo que incluye todos los números está denotado por una $\mathbb{R}$ de real. Cualquier número que podamos imaginar de la recta real está en alguna parte de este dibujo.