Matemáticas para multimedia I

Pere Cruells
Salvador Linares Mustarós
Germán Sáez
Joan Trias Pairó
Queralt Viladevall Valldeperas

PID_00212609

Material docente de la UOC

UOC
Universitat Oberta de Catalunya

Pere Cruells

Profesor de Matemáticas en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona de la UPC, consultor de Matemáticas en la UOC y profesor de matemáticas en la Escuela de Fotografía de la UPC. Colabora en proyectos de innovación docente para la enseñanza de las Matemáticas y hace cursos de formación en el Instituto de Ciencias de la Educación de la UPC. Ha publicado libros de Matemáticas para primeros cursos universitarios.

Salvador Linares Mustarós

Profesor ayudante de la Universidad de Gerona. Su investigación se centra en el campo del tratamiento de la incertidumbre, en el que se ha especializado en la creación de programas relacionados con la extracción de datos. Licenciado en Matemáticas, colabora habitualmente con editoriales para producir software multimedia.

Germán Sáez

Doctor en Matemáticas y profesor del Departamento de Matemática Aplicada IV de la UPC. Imparte docencia en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación de Barcelona (UPC). Ha sido consultor de los cursos de acceso para mayores de 25 años, de la asignatura de Álgebra de Ingeniería Técnica de Informática de la UOC y profesor de matemáticas en la Escuela de Fotografía de la UPC. Su campo de investigación es la criptografía y la seguridad de las comunicaciones.

Joan Trias Pairó

Doctor en Ciencias (Matemáticas) y profesor del Departamento de Matemática Aplicada II de la UPC. Actualmente desarrolla su actividad docente en la Facultad de Informática de Barcelona (FIB) y en la EUETIB, de Ingeniería de la UPC. Sus intereses se centran en la geometría para gráficos, sistemas multimedia, animación 3D y desarrollo de videojuegos, y herramientas de ilustración y visualización geométrica. Forman parte también de sus intereses y actividad docente los fundamentos matemáticos, la matemática discreta y los problemas de la transición de secundaria a la Universidad.

Queralt Viladevall Valldeperas

Licenciada en Bellas Artes por la Universidad de Barcelona. Participa habitualmente en proyectos editoriales de ilustración y animación por ordenador. En la actualidad, desarrolla un proyecto propio sobre la incorporación de elementos de lógica borrosa en el arte conceptual.

La revisión de este material docente ha sido coordinada por la profesora: M. Antonia Huertas Sánchez (2014)

Primera edición: septiembre 2014
© Pere Cruells, Salvador Linares Mustarós, Germán Sáez, Joan Trias Pairó, Queralt Viladevall Valldeperas
Todos los derechos reservados
© de esta edición, FUOC, 2014
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Diseño: Manel Andreu
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL
Depósito legal: B-16.547-2014

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Contenidos

Módulo didáctico 1
Flash CS4 para la animación y el grafismo digital
Salvador Linares Mustarós y Queralt Viladevall Valldeperas
1. Animación en Flash y fotogramas
2. Capas
3. Películas dentro de películas
4. Botones y campos de texto
5. Action

Módulo didáctico 2
Teoría de números para diseño
Salvador Linares Mustarós
1. Tipos de números
2. Ejercicios con solución

Módulo didáctico 3
Trigonometría aplicada al diseño gráfico
Salvador Linares Mustarós
1. Conceptos básicos
2. Ejercicios con solución

Módulo didáctico 4
Diseño y proporción
Pere Cruells y Germán Sáez
1. El concepto de proporción
2. Proporciones racionales y proporciones √n
3. El número de oro y aplicaciones

Módulo didáctico 5
Geometría fractal
Pere Cruells y Germán Sáez
1. Introducción a la geometría fractal
2. Dimensión fractal y otras construcciones fractales

Módulo didáctico 6
Matrices en el grafismo digital y en el desarrollo de webs
Salvador Linares Mustarós
1. Conceptos básicos
2. Ejercicios con solución

Módulo didáctico 7
Simetría y diseño
Pere Cruells y Germán Sáez

1. Aplicaciones del plano
2. Isometrías del plano
3. Simetría de figuras, cenefas y mosaicos

Módulo didáctico 8

Grafismo digital 2D y 3D

Salvador Linares Mustarós

1. Conceptos básicos
2. Ejercicios con solución

Módulo didáctico 9

Anexo 1. Aspectos básicos y sistemas de coordenadas

Joan Trias Pairó

1. Aspectos básicos
2. Sistemas de coordenadas
3. Algunos objetos geométricos

Módulo didáctico 10

Anexo 2. Transformaciones geométricas

Joan Trias Pairó

1. Geometría métrica
2. Transformaciones geométricas 2D
3. Transformaciones geométricas 3D

Módulo didáctico 11

Anexo 3. Curvas y superficies

Joan Trias Pairó

1. Curvas
2. Superficies

Glosario

A-B Diferencia de *A* menos *B*. Es el conjunto de los puntos que son de *A* y no de *B*.

[a,b] **Véase** *intervalo [a,b].*

animación animate on (_)

ángulo Dados los vectores *u,v* no nulos, el ángulo que forman es $a = \text{arcos}\,\frac{u, v}{\|u\|\|v\|}$.

arco coseno trigonométrico acos

arco seno trigonométrico asin

arco tangente trigonométrica atan

Arquímedes, espiral o hélice espiral **Véase** *espiral de Arquímedes y hélice espiral de Arquímedes*.

base Una colección de vectores es base si: a) son vectores linealmente independientes; b) cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la colección.

base ortonormal Base formada por vectores unitarios dos a dos ortogonales.

bézier Tipo de curva simple que está en la base de los sistemas de diseño de curvas por ordenador. Es también una forma de tratar los vértices de una *spline* en cuestiones relacionadas con suavizado, modificación y acceso a las asas de control de tangencia.

booleanas, operaciones **Véase** *Operaciones booleanas*.

CAD Siglas de *Computer Aided Design*, diseño asistido por ordenador.

cardioide Curva de ecuación *r=a(1+cost)* en coordenadas polares. La parametrización correspondiente es $\left.\begin{array}{l} x(t) = a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) = a(1+\cos t)\sin t \end{array}\right\}, 0 \le t \le 2\pi$

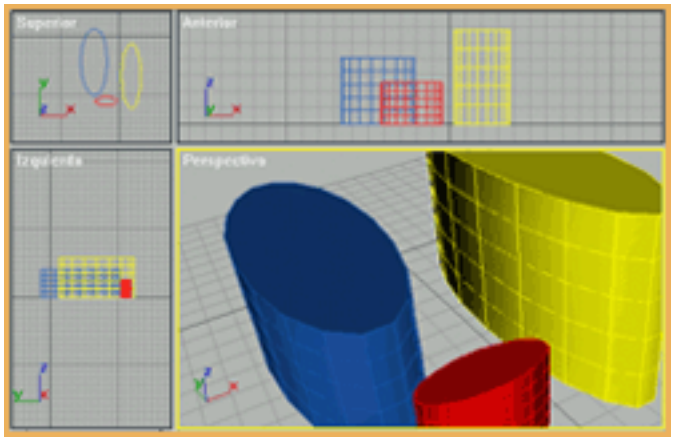
cilindro circular recto El cilindro circular recto de radio *R* y de eje una recta e del espacio tridimensional es la superficie que está formada por las rectas que son paralelas el eje *e*, que pasan por una circunferencia de radio *R*, con centro en el eje *e*, y contenida en un plano perpendicular al eje.
Parametrización del cilindro de eje el eje *z* de radio *R*, con la base inferior sobre el plano *z=0*, incluido en el semiespacio de las coordenadas *z* positivas o nulas, y de altura *H*:

$$\left.\begin{array}{l} x(t,s) = R\cos t \\ y(t,s) = R\sin t \\ z(t,s) = s \end{array}\right\}; 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H.$$

Parametrización del cilindro de eje paralelo al eje *Oz*, pasando por el punto *(a,b,*)*, de radio *R*, con la base inferior sobre *z=0*:

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) &= a + R\cos t \\ y(t,s) &= b + R\sin t \\ z(t,s) &= s \end{aligned}\right\};\ 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le s \le H$$

cilindro elíptico El cilindro elíptico de eje el eje de coordenadas *Oz* y de directriz una elipse contenida en *z=0* con centro en el origen de coordenadas es el conjunto de las rectas que son paralelas al eje *y* pasan por la elipse.



circunferencia de radio R y centro (a,b) Curva de ecuación

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Parametrización:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a + R\cos t \\ y(t) &= b + R\sin t \end{aligned}\right\},\ 0 \le t \le 2\pi$$

combinación lineal Una combinación lineal de los vectores $e_1, \ldots, e_n$ es un vector de la forma $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$.

componentes de un vector Si tenemos el vector $(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$, la i-ésima componente es x_i.

cono circular recto Superficie generada por las retas que pasan por una circunferencia y por un punto *V* común (vértice) no contenido en el plano de la circunferencia. Además, la recta por *V* que es perpendicular al plano de la circunferencia pasa por su centro.

coordenadas cartesianas Coordenadas correspondientes a un sistema de coordenadas cartesianas (ejes de coordenadas respectivamente perpendiculares, con la misma unidad de medida).

coordenadas polares (en el plano bidimensional) Las coordenadas polares de un punto *P* es el par *(r,t)*, donde: *r=d(P,O)*, distancia de *P* al origen de coordenadas del sistema usual de coordenadas cartesianas; *t*, ángulo antihorario que el semieje *x+* forma con el segmento OP.

coseno (trigonométrico) cos

En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo es la razón (cateto contiguo)/ hipotenusa.

curva de Bézier Curva simple generada por el método de Bézier. Funcionalidad incorporada en la gran mayoría de los programas de grafismo 2D y 3D.

curva en coordenadas polares Las curvas en coordenadas polares se describen mediante la ecuación $r=f(t), t_1 \leq t \leq t_2$. La parametrización genérica resultante es

$$\begin{cases} x(t) = f(t)\cos t \\ y(t) = f(t)\sin t \end{cases}, \; t_1 \leq t \leq t_2 n$$

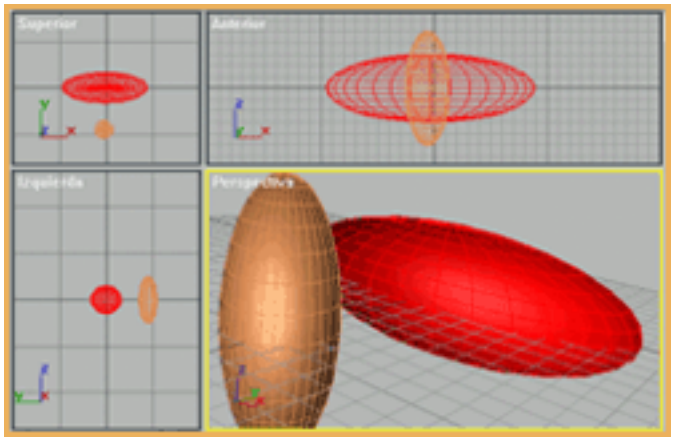
curva spline Tipo de curva usada en la mayoría de los programas de grafismo y CAD para generar curvas en forma interactiva.

dependencia lineal Los vectores de una colección son linealmente dependientes si existe una combinación lineal de los mismos igual a cero sin que todos los coeficientes sean nulos. Equivalentemente, uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los demás.

diferencia booleana Operación booleana que se aplica a dos conjuntos *A,B* en orden. La diferencia *A-B* es el conjunto de los puntos de *A* que no pertenecen a *B*.

distancia Dados los puntos $P=(x_1,...X_n)$, $Q=(Y_1,...,y_n)$, la distancia entre ambos es $d(P,Q) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+...+(y_n-x_n)^2}$

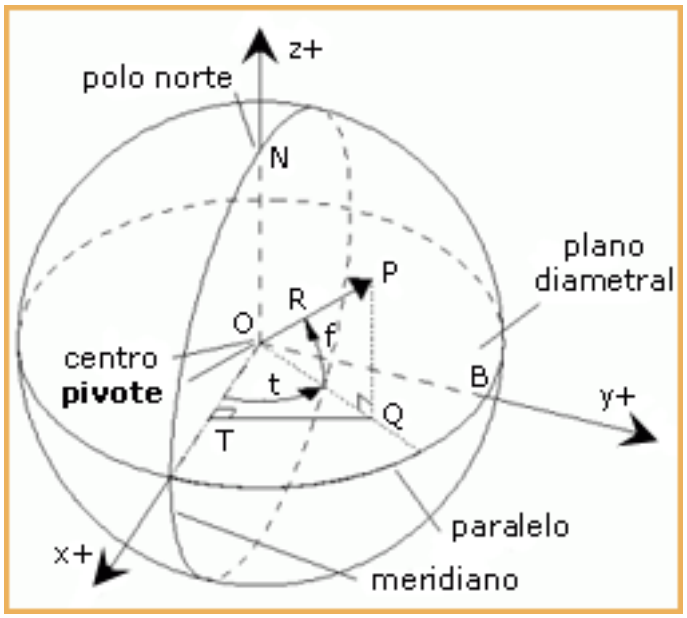
elipsoide El elipsoide de centro el origen, ejes principales los ejes de coordenadas y semiejes a,b,c es la superficie de ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$



escala, cambio de **Véase** *cambio de escala*.

esfera La esfera de radio R y de centro el punto *C=(a,b,c)* es el conjunto de los puntos *P=(x,y,z)* del espacio que están a distancia *R* de *C*.

Ecuación: Ecuación: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$



Parametrización de la esfera de radio R y centro $C=(a,b,c)$:

$$\left.\begin{aligned} x(t,f) &= a + R\cos f\cos t \\ y(t,f) &= b + R\cos f\sin t \\ z(t,f) &= c + R\sin f \end{aligned}\right\};\ 0 \le t \le 2\pi;\ -\frac{\pi}{2} \le f \le \frac{\pi}{2}$$

espiral de Arquímedes La curva $r=at$ en coordenadas polares.
Parametrización:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \end{aligned}\right\},\ 0 \le t \le t_1$$

siendo t el ángulo polar del punto $P=(x,y)$.

expresión paramétrica Expresión matemática por la que se expresa una curva en función de la variación de un parámetro, del cual también se describe el intervalo de variación. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia de centro el origen, radio R, contenida en el plano de coordenadas $z=0$, es $P(t)=(R\cos t, R\sin t, 0)$, con $0 \le t \le 2\pi$.

factor de conversión de radianes a grados sexagesimales $\frac{180}{\pi}$.

factor de conversión de grados sexagesimales a radianes $\frac{\pi}{180}$.

forma explícita En esta forma la superficie es el conjunto de los puntos del espacio para los que podemos expresar z en función de las otras dos coordenadas, es decir, $z=f(x,y)$, con x,y variando en intervalos numéricos reales adecuados.
Las curvas en forma explícita son las que pueden expresarse como $y=f(x)$, variando x en un determinado intervalo de la recta numérica real.

forma implícita Los puntos de la curva se describen como los puntos que satisfacen una ecuación $F(x,y)=0$.
En esta forma las superficies se describen por una ecuación del tipo $F(x,y,z)=0$.

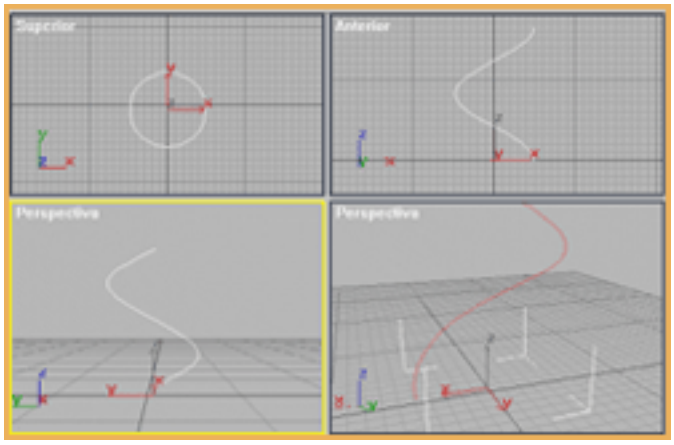
forma paramétrica En forma paramétrica expresamos los puntos de la superficie en función de dos parámetros. Así, *P(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) es la fórmula paramétrica de la superficie (parametrizada), u,v son los parámetros, que varían* en sendos intervalos de la recta numérica real, es decir, $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_2 \leq v \leq v_2$.

generadores Una colección de vectores son generadores del espacio si todo vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la colección.

generatriz, curva Curva que es la base de partida para una superficie de revolución, la cual se obtiene por rotación alrededor de una recta de la curva dada.

grado sexagesimal Medida de ángulos. Dividiendo la circunferencia en 360 partes iguales, (un grado sexagesimal) es el ángulo de vértice el centro de la circunferencia correspondiente a dos subdivisiones consecutivas sobre la misma.

hélice circular de radio *a*, paso de rosca *b* y eje el eje de coordenadas *z*

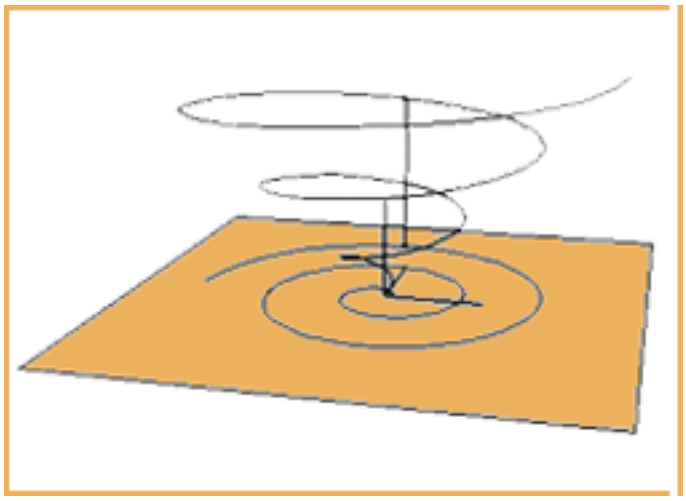


La parametrización será

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= a\sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned}\right\},\ t \geq 0$$

siendo t el ángulo polar del punto de la proyección ortogonal *P'=(x,y,0)* sobre el plano xy del punto *P=(x,y,z)* de la curva.

hélice espiral de Arquímedes Una parametrización posible es:



$$\left.\begin{aligned} x(t) &= at\cos t \\ y(t) &= at\sin t \\ z(t) &= bt \end{aligned}\right\}, t \geq 0$$

independencia lineal Una colección de vectores son linealmente independientes si no son linealmente dependientes.

intersección booleana Operación booleana que se aplica a dos conjuntos consistente en la colección de elementos que son de ambos conjuntos.

intervalo *[a,b]* Conjunto de los puntos de la recta comprendidos entre *a* y *b*, ambos incluidos.

longitud arco de circunferencia *tR*, siendo *R* el radio y *t* el ángulo correspondiente al arco, en radianes.

longitud de un vector **Véase** *norma de un vector*.

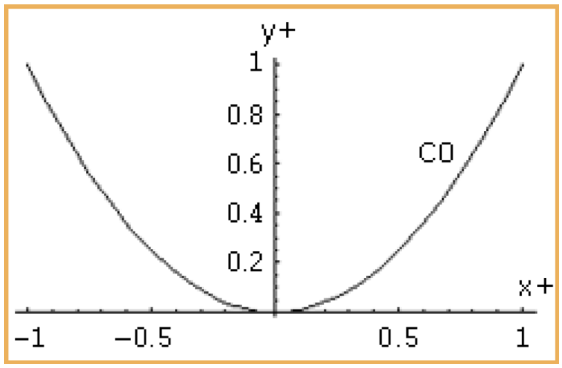
módulo de un vector **Véase** *norma de un vector*.

normal al plano ax+by+cz+d=0 Es el vector *N=(a,b,c)*.

norma de un vector La norma del vector $W=(w_1,\ldots,w_n)$ es $\|w\| = \sqrt{w_1^2 + \ldots + w_n^2}$.

normalizar **Véase** *Unitarizar*.

parábola $y = ax^2 + bx + c$



Parametrización tomando *x=s* como parámetro:

$$\left.\begin{array}{l} x(s) = s \\ y(s) = as^2 + bs + c \end{array}\right\}, \; s_0 \leq s \leq s_1$$

parametrización Los puntos de la curva se expresan como $P(t) = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. La función $\gamma(t)$ es la *función de parametrización, t* es el *parámetro* y *[a,b]* es el **intervalo de variación del parámetro**. Desglosado por coordenadas, tendremos *P(t)=(x(t),y(t))* en dimensión 2, en el plano bidimensional. En dimensión 3, es decir, en el espacio tridimensional, será *P(t)=(x(t),y(t),z(t))*, siempre con indicación de la variación del parámetro t.

parametrización de la circunferencia La circunferencia de centro el origen y radio *R* se puede parametrizar por *P(t)=(Rcost, Rsint)*, $0 \leq t \leq 2\pi$, siendo *t* el ángulo polar del punto *P*.

parametrización de la esfera Consideremos la esfera de centro el origen y radio *R*. Si consideramos un punto *P* de la esfera, de longitud *u* y latitud *v*, la esfera se parametriza por *P(u,v)=(R cos v cos u, Rcos v sin u, R sinv)*, con $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

parametrización de la recta La recta que pasa por el punto *A* y tiene vector director w se parametriza por P*(t)=A+tw*, con *t* número real.

parametrización del segmento El segmento de extremos A,B se parametriza por *P(t)=A+t(B-A)*, con *t* variando entre 0 y 1.

producto escalar $(u_1,\ldots,u_n)\cdot(v_1,\ldots,v_n) = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$.

producto de un escalar por una matriz Si $A = (a_{ij})$, es $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

producto de matrices Si *A* es una matriz de *n* filas y *m* columnas, y *B* es una matriz de *m* filas y *r* columnas, si *C=AB*, y es el término general de la matriz producto *C*, en el orden indicado, entonces es $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$.

producto de un escalar por un vector $\lambda(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, \lambda x_n)$.

producto vectorial Si $u = (u_1,u_2,u_3)$, $v = (v_1,v_2,v_3)$, el producto vectorial es $u \wedge v = (u_2v_3 - v_2u_3, v_1u_3 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2)$.

proyección ortogonal sobre el plano xy La proyección ortogonal del punto *(x,y,z)* sobre el plano *xy* es el punto *(x,y,0)*.

proyección ortogonal sobre el plano xz La proyección ortogonal del punto *(x,y,z)* sobre el plano *xz* es el punto *(x,0,z)*.

proyección ortogonal sobre el plano yz La proyección ortogonal del punto *(x,y,z)* sobre el plano *yz* es el punto *(0,y,z)*.

radián Medida de ángulos. Sobre una circunferencia, 1 radián es el ángulo de vértice el centro de la circunferencia tal que la longitud del arco que subtiende es igual al radio de la circunferencia.

revolución, superficie de **Véase** *superficies de revolución*.

rodonea Curva de ecuación polar *r=a cosnt*. Parametrización:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos nt\cos t \\ y(t) &= a\cos nt\sin t \end{aligned}\right\},\ 0 \le t \le 2\pi$$

La variable n está relacionada con el número de "pétalos" de la "flor":

rotación positiva respecto del eje de coordenadas *Ox* La matriz correspondiente a una rotación positiva de ángulo *a* respecto del eje *x* es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos a - z\sin a \\ z' = y\sin a + z\cos a \end{cases}$$

Con estas ecuaciones, si el ángulo a es positivo, la rotación se ve como antihoraria (sobre el plano perpendicular al eje *x*, el plano *yz*, observándola desde *z+*.

rotación positiva respecto del eje de coordenadas *Oy* La matriz de la rotación positiva de ángulo b respecto del eje Oy es

$$\begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \begin{cases} x' = x\cos b + z\sin b \\ y' = y \\ z' = -x\sin b + z\cos b \end{cases}$$

rotación positiva respecto del eje de coordenadas Oz La matriz de la rotación positiva de ángulo *c* respecto del eje de coordenadas *z+* es

$$\begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x' = x\cos c - y\sin c \\ y' = x\sin c + y\cos c \\ z' = z \end{cases}$$

rotación respecto del origen de coordenadas, de ángulo *a* Si a es positivo, con la expresión matricial siguiente se obtendrá una rotación antihoraria, de sentido contrario a las agujas del reloj.

$$R_O^a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{cases} x' = x \cos a - y \sin a \\ y' = x \sin a + y \cos a \end{cases}$$

rotación respecto del punto *C*, de ángulo *a* $E_C^a = T_C \circ E_O^a \circ T_{-C}$

seno (trigonométrico) En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo es la razón (cateto opuesto)/hipotenusa.

sexagesimal, grado **Véase** *grado sexagesimal*.

simetría central en el plano respecto de un punto C Giro de 180 grados respecto de C.
La expresión de la transformación como concatenación de transformaciones es
$S_C = R_C^{180} = T_C \circ R_O^{180} \circ T_{-C}$.

simetría especular respecto del plano *xy* Si $P=(x,y,z)$ es un punto genérico del espacio, el simétrico P', simétrico respecto del plano xy, será $P'=(x,y,-z)$. Las ecuaciones correspondientes son

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

simetría especular respecto del plano *xz* Si $P=(x,y,z)$ es un punto genérico del espacio, el simétrico P', simétrico respecto del plano xz, será $P'=(x,-y,z)$. Las ecuaciones correspondientes son

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

simetría especular respecto del plano *yz* Si $P=(x,y,z)$ es un punto genérico del espacio, el simétrico P', simétrico respecto del plano yz, será $P'=(-x,y,z)$. Las ecuaciones correspondientes son

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

spline **Véase** *curva Spline*.

suma de matrices Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, la matriz suma $C = A + B$ es la matriz $C = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

superficies de revolución Para la generación de dichas superficies hacen falta dos elementos: una *curva (curva directriz)* y una *recta*, que será eje de rota-

ción de la directriz. El resultado de la rotación completa de la curva directriz alrededor del eje es una superficie de revolución.

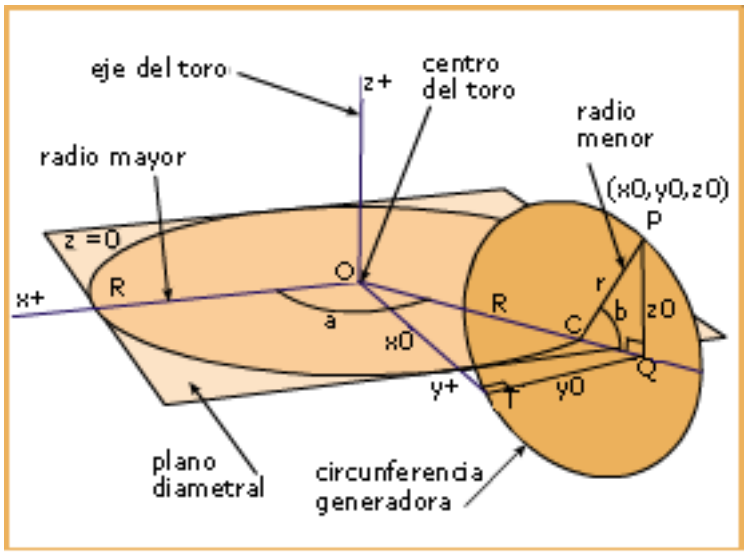
Una posible parametrización de la superficie generada por una rotación completa de la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t));\ a \le t \le b$ alrededor del eje Oz es:

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\cos\theta \\ y(t,\theta) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\sin\theta \\ z(t,\theta) &= z(t) \end{aligned}\right\};\ a \le t \le b;\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Superficie generada por rotación de una curva alrededor de una recta o eje. Se obtiene a partir de una curva *spline* o *nurbs* y el modificador Torno.

tangente (trigonométrica) Cociente seno/coseno.

toro El toro es la superficie que se genera por la rotación de una circunferencia alrededor de una recta (*eje del toro*), siendo dicha recta exterior a la circunferencia y ambas figuras coplanarias. El *plano diametral* del toro es el plano que pasa por el centro de la circunferencia generadora y es perpendicular al eje. Su intersección con el eje es el centro del toro. En la figura siguiente se muestran todos estos elementos.



A partir de la figura vamos a obtener una posible parametrización del toro, utilizando los parámetros angulares *a,b*. Para ello, consideraremos los triángulos rectángulos *OPQ,OQT*. Obsérvese que *OQ=OC+CQ=R+rcosb*. Así, podemos escribir *x,y,z* del punto *P=(x,y,z)* en función de *a,b*:

$$\left.\begin{aligned} x(a,b) &= (R + r\cos b)\cos a \\ y(a,b) &= (R + r\cos b)\sin a \\ z(a,b) &= r\sin b \end{aligned}\right\};\ 0 \le a \le 2\pi,\ 0 \le b \le 2\pi$$

transformación afín Corresponden a la estructura (siendo *P, P'* vectores posición) *P'=f(P)=AP+W*. En la expresión anterior *A* es una matriz 3x3, y *W* es un vector tridimensional. Se dice que *AP* es la parte lineal de la transformación afín, y que W es el vector de traslación, por motivos que veremos en la sección siguiente. En términos matriciales,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + w_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + w_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + w_3 \end{cases}$$

transformaciones afines bidimensionales (expresión matricial) Transformaciones geométricas de la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + w_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + w_2 \end{cases}$$

transformaciones afines generales Transformaciones geométricas que corresponden a la estructura (siendo *P, P'* vectores posición)*P'=f(P)=AP+W*.
En la expresión anterior *A* es una matriz 2x2, y *W* es un vector bidimensional. Se dice que AP es la *parte lineal* de la transformación afín, y que *W* es el *vector de traslación*.

traslación Dado un vector *w=(a,b)*, se define la traslación de vector *w*, y se denota T_w, como la transformación

$$T_w(P) = P + w \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

Y, dado un vector *w=(a,b,c)*, se define la traslación de vector *w*, y se denota T_w,

como la transformación $T_w(P) = P + w \qquad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

unión booleana Se aplica a dos conjuntos y es el conjunto de los elementos que son de uno o del otro.

unitario, vector Vector de norma 1.

unitarizar Dividir por la norma, si el vector es no nulo ($\left(w_1 = \frac{1}{\|w\|} w\right)$).

Bibliografía

Bibliografía: Diseño y proporción

Alsina, C.; Trillas, E. (1994). *Lecciones de Álgebra y Geometría*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Alsina, C. (1996). *Matemàtiques per a fotògrafs*. Terrassa: Escola de Fotografia de la Fundació Universitat Politècnica de Catalunya.

Alsina, C.; Garcia, J.L.; Jacas, J. (1992). *Temes clau de geometria*. Barcelona: Edicions UPC.

Blackwell, L. (1993). *La tipografía del s. XX*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Bootello, J.; Thomas, I. (1998). *3D Studio Max*. Madrid: Editorial Anaya Multimedia, S.A.

Boyer, C.B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Coxeter, H.S.M. (1969). *Introduction to Geometry*. Nueva York: John Willey and Sons, Inc.

Ghyka, M.C. (1984). *El número de oro. Los ritmos. Los ritos*. (2 volúmenes). Barcelona: Poseidón.

Ghyka, M.C. (1983). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Poseidón.

Matemàtica i disseny arquitectònic. Sant Jeroni de la Murtra. (1988). Badalona: Museu de Badalona.

Pedoe, D. (1982). *La geometría en el arte*. Barcelona: Gustavo Gili.

Pla i Carrera, J. (1984). *Las Matemáticas. Una historia de sus conceptos*. Barcelona: Montesinos Editor, S.A.

Singh, S. (1988). *El enigma de Fermat*. Barcelona: Planeta S.A.

Bibliografía: Simetría y diseño

Alsina, C.; Trillas, E. (1984). *Lecciones de Álgebra y Gemotría*. Barcelona: Gustavo Gili.

Alsina, C. (1996). *Matemàtiques per a fotògrafs*. Terrassa: Escola de Fotografia de la Fundació Universitat Politècnica de Catalunya.

Bootello, J.; Thomas, I. (1998). 3D *Studio Max*. Madrid: Anaya Multimedia, S.A.

Bossard, Y. (1977). *Rosaces, frises et pavages*. París: CEDIC.

Boyer, C.B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Coxeter, H.S.M. (1969). *Introduction to Geometry*. Nueva York: John Willey and Sons, Inc.

Coxeter, H.S.M.; Emmer, M; Penrose, R; Teuber, M.L. (1986). *M.C. Escher: Art and Science*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

Fradera Veiga, R. (1983). *Atlas de los Estilos Artísticos*. Barcelona: Ediciones Jover.

Gardner, M. (1990). *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*. Barcelona: Idea Books.

Bibliografía: Geometría fractal

Hearn, D.; Baker, M.P. (1997). *Computer Graphics. C Version*. Prentice Hall.

Schroeder, M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise*. W.H. Freeman and Company.

Mandelbrot, B.B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.

Barnsley, M.F. (1993). *Fractals Everywhere*. Cambridge, (EE.UU.): Academic Press, MA.

Links: Geometría fractal

Applet en Java para crear varios fractales a partir de un cuadrado como semilla. Se pueden construir distintas iteraciones. Una vez obtenida una iteración, ésta se puede repetir hasta seis veces: http://darkwing.uoregon.edu/~koch/java/Fractal.html

Applet en Java donde se pueden ver distintos tipos de fractales (Koch, Sierpinski, etc.) con distintas ampliaciones e iteraciones: http://library.thinkquest.org/26242/full/progs/koch.html

Otro *applet* en Java para otro famoso fractal: el Dragon de Jurassic Park: http://www.best.com/~ejad/java/fractals/jurasic.shtml

Área fractal. Web sobre fractales, incluye una galería de fractales, información sobre *software* para crear fractales, etc.: http://www.arrakis.es/~sysifus/

http://math.rice.edu/~lanius/frac/

Algunas lecciones sobre fractales:

Galería de fractales de Mandelbrot. Permite ampliar y reducir partes de un fractal: http://www.softlab.ntua.gr/miscellaneous/mandel/