Propietats de les derivades i problemes d'optimització

Albert Gras i Martí
Teresa Sancho Vinuesa

PID_00183883

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Sobre aquests materials de treball

Veurem algunes aplicacions bàsiques de les derivades (càlcul de ritmes de canvi, punts crítics, màxims i mínims) per, a continuació, plantejar els problemes d’optimització, que són el nucli d’aquests materials.

1. Aplicació de les derivades

Una de les aplicacions importants de les derivades és la resolució de problemes d'optimització (màxims i mínims) i la representació gràfica de funcions. En primer lloc repassarem algunes idees bàsiques sobre les derivades.

1.1. Ritme de canvi

Recordem una de les propietats més importants de les derivades: la derivada $f'(x)$ representa el ritme de canvi de la funció $f(x)$.

Per exemple, la funció $f(x) = x^2 - 1$ és una paràbola que "mira amunt" perquè el signe del terme quadràtic és positiu i que té el vèrtex en $x = 0$. La funció val $f(0) = -1$ en el mínim. Sabem, doncs, que la funció decreix fins a $x = 0$ i creix a partir d'aquest punt. Fixeu-vos que la derivada de la funció en aquest punt és 0: $f'(x) = 2x = 0$ si $x = 0$. Això vol dir que el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt és 0 i, per tant, la recta tangent és una funció constant, $y = -1$.

Vegem alguns exemples més.

A1

Determineu tots els punts en què la funció següent no varia:

$$g(x) = 5 - 6x - 10\cos(2x)$$

Ajut: La funció resta constant si el ritme de canvi és nul. Trobeu els punts on la derivada de la funció s'anul·la.

A2

Determineu quan és creixent la funció següent:

$$A(t) = 27t^5 - 45t^4 - 130t^3 + 150$$

Ajut: Si la derivada (és a dir, el pendent) d'una funció és positiva, la funció és creixent. Si la derivada és negativa, la funció és decreixent.

1.2. Punts crítics

Diem que $x = c$ és un punt crític de la funció $f(x)$ si $f(c)$ existeix i, a més a més, es compleix que la derivada de la funció, calculada en aquest punt, s'anul·la:

$$f'(c) = 0$$

o bé no existeix:

$$f'(c) \text{ no existeix.}$$

És important subratllar que cal que $f(c)$ existeixi perquè puguem dir que $x = c$ és un punt crític de la funció.

A3

Determineu els punts crítics de la funció següent:

$$f(x) = 6x^5 + 33x^4 - 30x^3 + 100$$

I fem un exercici en què la derivada no existeix en un punt.

A4

Determineu els punts crítics de la funció següent:

$$g(t) = \sqrt[3]{t^2}\,(2t - 1)$$

Com hem vist, cal manipular l'expressió de la derivada perquè sigui fàcil veure si la derivada no existeix o s'anul·la en algun punt.

Vegem dos exercicis més, que també serveixen per a repassar les derivades.

A5

Determineu els punts crítics de les funcions següents:

a) $h(t) = 10te^{3-t^2}$

b) $f(x) = x^2 \ln(3x) + 6$

Ajut: Recordeu que cal que la funció existeixi en el punt perquè sigui un punt crític.

I també hi pot haver funcions que no tinguin punts crítics. Vegem-ne un exemple.

A6

Determineu els punts crítics de la funció següent:

$$f(x) = xe^{x^2}$$

1.3. Màxims i mínims

El càlcul dels valors màxims i mínims d'una funció té moltes aplicacions en problemes d'enginyeria. Té molt interès doncs, estudiar com s'han de calcular els extrems d'una funció.

És important distingir entre dos tipus de màxims i mínims d'una funció:

1) Diem que $f(x)$ té un màxim absolut (o global) en $x = c$ si $f(x) \leq f(c)$ per a qualsevol valor de x del domini en què treballem.

2) Diem que $f(x)$ té un màxim relatiu (o local) en $x = c$ si $f(x) \leq f(c)$ en algun interval obert al voltant de $x = c$.

3) Diem que $f(x)$ té un mínim absolut (o global) en $x = c$ si $f(x) \geq f(c)$ per a qualsevol valor de x del domini en què treballem.

4) Diem que $f(x)$ té un mínim relatiu (o local) en $x = c$ si $f(x) \geq f(c)$ en algun interval obert al voltant de $x = c$.

Quan parlem que hi ha un "interval obert" al voltant de $x = c$ ens referim al fet que podem trobar algun interval (a, b) que no inclogui els punts extrems, tal que $a < c < b$. Altrament dit, c és dins l'interval i no coincideix amb cap dels extrems.

Els punts màxims o mínims d'una funció s'anomenen **punts extrems** de la funció. I distingim entre extrems relatius i extrems absoluts.

Parlem de màxims absoluts (o mínims absoluts) en $x = c$ si $f(c)$ és el valor més gran (o el més petit) que pot prendre la funció en el domini en què treballem.

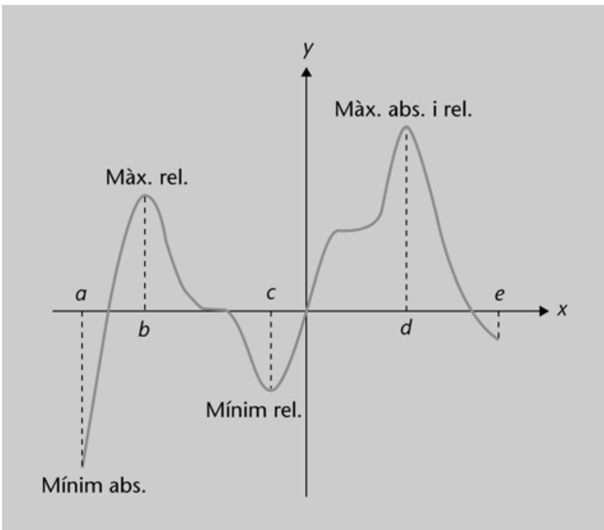
Parlem de domini en què "treballem" perquè en cada cas ens pot interessar treballar amb algun conjunt de valors de la variable x, que no tenen per què ser tots els valors possibles del domini de la funció.

Els valors màxims o mínims relatius d'una funció en $x = c$ ho són per a algun interval obert al voltant de $x = c$. Hi poden haver valors més grans o més petits de la funció en algun altre interval, però relatius a $x = c$, o localment en $x = c$, $f(c)$ és més gran o més petit que tots els altres valors de la funció que són a prop.

Per a veure si un punt és extrem relatiu hem de poder veure quin valor pren la funció als dos costats del punt $x = c$.

En la figura 1 mostrem una funció que té diversos extrems en l'interval $[a, e]$.

Figura 1. Màxims i mínims absoluts i relatius d'una funció



En la figura 1 veiem que la funció té màxims relatius en $x = b$ i $x = d$, perquè són en l'interior del domini que s'hi mostra, i són els valors més grans de la funció per a un interval determinat al voltant del punt.

També tenim un mínim relatiu en $x = c$ perquè aquest punt és interior al domini i és el punt més petit de la gràfica en un interval al voltant del punt. El punt de l'extrem de l'interval $x = e$ no és un mínim relatiu perquè no hi ha punts més grans que e.

La funció té un màxim absolut en $x = d$ i un mínim absolut en $x = a$. Aquests dos són els punts on la funció pren el valor major i menor.

Fem un exercici.

A7

Representeu gràficament i identifiqueu els extrems absoluts i relatius de la funció següent:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-1, 2]$$

Per tant, una funció no té per què tenir extrems relatius. Vegem un altre cas.

A8

Representeu gràficament i identifiqueu els extrems absoluts i relatius de la funció següent:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-2, 2]$$

Per tant, una funció pot tenir diferents punts on la funció tingui un màxim absolut i/o un mínim absolut.

A9

Representeu gràficament i identifiqueu els extrems absoluts i relatius de la funció següent:

$$f(x) = x^2$$

Per tant, una funció pot tenir mínims i no tenir màxims, o a l'inrevés.

A10

Representeu gràficament i identifiqueu els extrems absoluts i relatius de la funció següent:

$$f(x) = x^3 \qquad x \in [-2, 2]$$

Per tant, una funció pot no tenir cap tipus d'extrems relatius.

A11

Identifiqueu els extrems absoluts i relatius de la funció següent:

$$f(x) = x^3$$

Per tant, una funció pot no tenir cap tipus de punts extrems, ni absoluts ni relatius.

A12

Identifiqueu els extrems absoluts i relatius de la funció següent:

$$f(x) = \cos x$$

Com hem vist, una funció pot tenir infinits extrems relatius.

A través de diversos exemples hem vist que els extrems absoluts tenen propietats interessants. Les funcions que hem considerat en els exemples anteriors eren funcions **contínues**. Cada vegada que hem restringit el domini a un interval tancat (és a dir, un domini que conté els punts extrems) hem obtingut mínims i màxims absoluts. També hem vist un exemple en què no hem restringit el domini i hem obtingut un màxim absolut i un mínim absolut.

Aquestes observacions ajuden a comprendre el significat del teorema anomenat *teorema del valor extrem*:

Teorema del valor extrem: si una funció $f(x)$ és contínua en l'interval $[a, b]$ aleshores hi ha dos nombres c i d dins d'aquest interval ($a \le c$ i $d \le b$) tals que $f(c)$ és un màxim absolut per a la funció i $f(d)$ és un mínim absolut de la funció.

Per tant, si tenim una funció contínua en un interval $[a, b]$ podem garantir que tenim tant un màxim absolut com un mínim absolut de la funció en algun punt de l'interval. El teorema no ens diu on es trobaran o si n'hi haurà més d'un.

A13

Apliqueu el teorema anterior a la funció següent:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

Per tant, si el teorema del valor extrem no és aplicable, no podem dir res sobre els extrems absoluts de la funció. Es pot donar el cas que la funció no tingui màxim absolut (és el cas de la funció de l'activitat A13) o no tingui mínim absolut. Abans de començar a veure aplicacions de les derivades ens resultarà útil un altre teorema, que s'anomena *de Fermat*:

Teorema de Fermat: si una funció $f(x)$ té un extrem relatiu en $x = c$ i $f'(c)$ existeix, aleshores $x = c$ és un punt crític de la funció $f(x)$. A més a més, en aquest punt crític $f'(c) = 0$.

El teorema de Fermat ens diu que hi ha una relació entre els extrems relatius i els punts crítics. De fet ens permet obtenir una llista de tots els extrems relatius possibles. Com que un extrem relatiu ha de ser un punt crític, la llista de tots els punts crítics (punts on la derivada de la funció és 0 o no existeix) ens donarà una llista de tots els extrems possibles.

Per exemple, hem vist en l'A9 que la funció $f(x) = x^2$ té un mínim relatiu en $x = 0$. Per tant, d'acord amb el teorema de Fermat $x = 0$ ha de ser un punt crític. La derivada de la funció és:

$$f'(x) = 2x$$

I, certament, com sabem de l'A9, $x = 0$ és un punt crític.

Tanmateix, no s'ha de fer servir el teorema incorrectament. El teorema no diu que un punt crític és un punt extrem. Vegem-ho amb un exemple.

A14

Comproveu l'afirmació anterior per a la funció:

$$f(x) = x^3$$

en el punt $x = 0$.

Efectivament, en $x = 0$ la funció té un punt crític (derivada igual a zero) però no és ni un mínim ni un màxim relatiu.

Fixem-nos també que aquest teorema no diu res sobre extrems absoluts. Un extrem absolut pot ser, o no, un punt crític.

1.4. Càlcul d'extrems absoluts

Una de les aplicacions més importants de les derivades és el càlcul dels extrems absoluts d'una funció. Suposem que la funció $f(x)$ és contínua en l'interval $[a, b]$.

El teorema del valor extrem ens diu que, com que suposem que la funció és contínua i treballem en un interval tancat, hi podem trobar els extrems absoluts. Hem vist també en les activitats anteriors que no són altra cosa que els valors major i menor que poden tenir. Per tant, hem d'obtenir la llista d'extrems absoluts possibles i comprovar quins d'aquests donen els valors de la funció que siguin el més gran o el més petit.

Per tant, el procediment per a trobar els extrems absoluts d'una funció $f(x)$ en l'interval $[a, b]$ és:

1) Verificar que la funció és contínua en l'interval $[a, b]$.

2) Trobar tots els punts crítics de $f(x)$ en l'interval $[a, b]$.

3) Avaluar la funció en els punts crítics i en els extrems de l'interval.

4) Identificar els extrems absoluts de la funció (només cal mirar en quin punt o en quins punts la funció pren el valor més gran i en quin punt o en quins punts pren el valor més petit).

A15

Determineu els extrems absoluts de la funció següent:

$$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t + 4 \qquad t \in [-4, 2]$$

Com hem vist, els extrems absoluts es poden trobar en punts crítics o també en els extrems de l'interval. Sovint un es descuida de comprovar què passa en els extrems de l'interval que considerem. Cal recordar-ho!

A16

Determineu els extrems absoluts de la funció següent:

$$g(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t + 4 \qquad t \in [0, 2]$$

Per tant, l'interval on considerem el problema en pot modificar les solucions. Vegem un cas més complicat.

A17

Suposem que la població (en milers d'unitats) d'un insecte després de t mesos és donada per la funció següent:

$$P(t) = 3t + \sin(4t) + 100$$

Determineu-ne la població màxima i mínima durant els primers 4 mesos.

L'exemple anterior mostra que cal anar amb compte amb les solucions de les equacions trigonomètriques: cal incloure el terme $2\pi n$. I, a més a més, cal treballar amb prou precisió. En el cas anterior, si haguéssim arrodonit $111.7 \approx 112$ i $111.9 \approx 112$, semblaria que hi havia dues poblacions màximes, i sols n'hi ha una.

A18

Suposem que la quantitat de diners que tenim en el banc al cap de t anys és:

$$A(t) = 2\ 000 - 10te^{5-\frac{t^2}{8}}$$

Determineu el valor mínim i màxim de diners durant els primers 10 anys.

Com hem vist, és important incloure els extrems de l'interval d'interès.

Els punts crítics anteriors són conseqüència de l'anul·lació de la derivada. De vegades apareixen punts crítics perquè la derivada no és contínua. Vegem-ho.

A19

Determineu els extrems absoluts de la funció següent:

$$Q(y) = 3y(y+4)^{2/3} \qquad y \in [-5, -1]$$

Per tant, si haguéssim oblidat el punt crític de la funció on no hi ha derivada, $y = -4$, no hauríem obtingut el resultat correcte.

En conclusió, podem utilitzar la derivada per a identificar els extrems absoluts d'una funció. Aquests s'obtenen dels punts en què la derivada s'anul·la o dels punts en què no existeix.

A més a més, quan la derivada d'una funció és positiva la funció és creixent i en els intervals en què la derivada és negativa la funció és decreixent. Vegem-ne un exemple.

A20

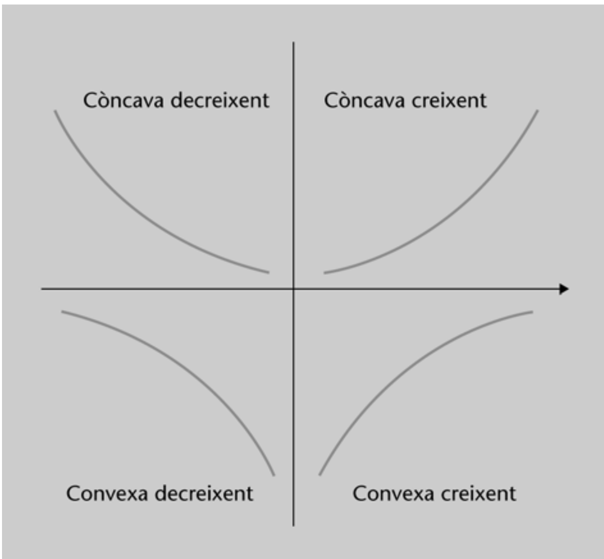
Trobeu els punts crítics de la funció següent, i els intervals en què la funció és creixent o decreixent. Feu-ne també un esquema.

$$g(t) = t\sqrt[3]{t^2 - 4}$$

1.5. Significat geomètric de la segona derivada: concavitat i convexitat

Hem vist que la primera derivada d'una funció dóna informació sobre la gràfica de la funció: creixement, decreixement i màxims i mínims. La segona derivada també ens en dóna. El concepte de concavitat i convexitat d'una funció, relacionat amb la segona derivada, es mostra en la figura 2.

Figura 2. Corbes còncaves i convexes



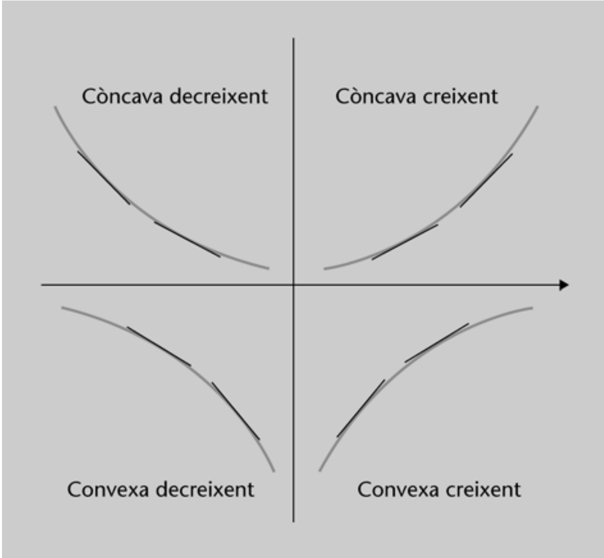
Una funció és **còncava** si s'*obre* o *mira cap amunt* i és **convexa** si s'*obre* o *mira cap avall*. La concavitat/convexitat no té res a veure amb el creixement o decreixement: una funció pot ser còncava o convexa i ser creixent, o ser decreixent.

Podem donar una definició més precisa de concavitat/convexitat:

Una funció $f(x)$, diem que és **còncava** (**convexa**) en un interval $[a, b]$ si totes les tangents a la corba en aquest interval estan per sota (per damunt) de la gràfica de la funció.

La figura 3 mostra que la definició anterior està d'acord amb el que hem dit sobre la figura 2.

Figura 3. Definició de concavitat/convexitat en termes de tangents a la funció



En la gràfica superior, per exemple, totes les línies tangents estan per sota de la corba i per això és còncava.

De vegades una funció presenta concavitat i convexitat en intervals diferents. Els punts de transició d'un tipus de curvatura a l'altre s'anomenen *punts d'inflexió*.

> Un punt $x = c$ s'anomena *punt d'inflexió de la funció* si la funció és contínua en aquest punt i si hi ha un canvi de concavitat a convexitat o a l'inrevés.

Recordeu que en l'activitat A14 vèiem que la funció $f(x) = x^3$ tenia un punt crític en el punt $x = 0$ però que no era ni un mínim ni un màxim relatiu. Si n'observem la representació gràfica ens adonem que la funció mira avall a l'esquerra de 0 i mira amunt a la dreta d'aquest punt. El punt $x = 0$ és, doncs, un punt d'inflexió.

Una altra manera de definir la concavitat/convexitat d'una funció és a partir de la segona derivada de la funció.

> Donada una funció $f(x)$, si $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) per a tots els punts x d'un interval I, aleshores diem que la funció $f(x)$ és còncava (convexa) en I.

Per tant, els possibles punts d'inflexió d'una funció són aquells en què la segona derivada és zero o no existeix. Però perquè sigui un punt d'inflexió cal comprovar que hi ha un canvi de concavitat als dos costats del punt.

És fàcil recordar el criteri de màxim/mínim i de concavitat/convexitat. Pensem en la paràbola més senzilla:

$$y = x^2$$

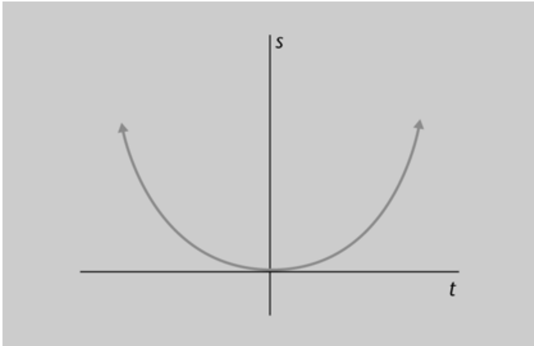
La gràfica és senzilla: s'anul·la en el punt $x = 0$ i per a tot x és positiva, amb dues branques que divergeixen per a punts x grans.

La primera derivada de la funció és:

$$y' = 2x$$

El pendent de la funció és negatiu (funció decreixent) per a $x < 0$, i positiu (funció creixent) per a $x > 0$.

Figura 4. Esquema d'una paràbola tipus $y = Ax^2$ amb $A > 0$



La primera derivada s'anul·la en $x = 0$. Per tant, tenim un extrem en $x = 0$. Per la forma de la gràfica sabem que es tracta d'un mínim, però ho podem comprovar amb la segona derivada:

$$y'' = 2$$

que és positiva en $x = 0$ (i per a qualsevol valor de x). La funció és, doncs, còncava.

A21

Demostra que

$$y = -x^2$$

és una funció convexa i té un màxim en $x = 0$.

Per tant, la segona derivada serveix per a classificar els punts crítics:

si $x = c$ és un punt crític de $f'(c)$ de manera que $f'(c) = 0$ i $f''(x)$ és contínua al voltant de $x = c$, aleshores:

- si $f''(c)< 0$ (si $f''(c) > 0$) $x = c$ és un màxim (mínim) relatiu;
- si $f''(c)= 0$ $x = c$ pot ser un màxim relatiu, un mínim relatiu, un punt d'inflexió.

És a dir, si la segona derivada és nul·la aleshores el punt crític pot ser qualsevol cosa.

A22

Aplica el test anterior a les funcions següents:

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = -x^4$

c) $f(x) = x^3$

2. Optimització

En matemàtiques, l'optimització s'ocupa de resoldre problemes en què l'objectiu és trobar "el més gran" o "el més petit" entre un conjunt d'elements. La tipologia de problemes i els procediments per a resoldre'ls són molt diversos. En aquest curs donarem les pautes per a resoldre problemes que equivalen a determinar el màxim o el mínim d'una funció d'una variable.

En un problema d’optimització es tracta de trobar quin és el valor més gran o més petit que pot prendre una funció.

Ja hem vist un tipus de problema d’optimització, el càlcul dels extrems absoluts d’una funció, és a dir, els valors més grans i més petits que pot prendre la funció en un interval concret.

En aquesta secció veurem un altre tipus de problemes d’optimització: cercar els valors més grans i més petits d’una funció sotmesa a algun tipus de restricció. La restricció serà alguna condició, que habitualment descriurem amb una equació que hauran de complir les solucions del problema.

Cal tenir molta cura a identificar en cada cas quina és la magnitud que volem optimitzar i quina és l’expressió que imposa la restricció.

El millor és referir-nos a exemples concrets, i començarem per veure’n un de senzill.

A23

Volem tancar un camp rectangular amb una tanca. Un edifici ocupa un dels costats llargs del rectangle i no hi cal posar tanca. Quina és l’àrea màxima del camp que podem tancar amb 200 m de tanca?

Fes un esquema del problema i planteja i resol les equacions corresponents.

Ajut: Planteja una equació per a l’àrea del camp (que volem maximitzar) i una altra per a la longitud de la tanca (que té un valor total prefixat). Redueix el problema a una sola incògnita, i maximitza la funció corresponent.

El procediment que hem seguit en l’activitat anterior és el que seguirem sempre de manera semblant. En aquest tipus de problemes és fonamental establir la funció que volem maximitzar, així com les restriccions del problema.

Vegem com una lleugera modificació en les restriccions dóna una solució ben diferent al problema.

A24

Fem el mateix problema A23 però sense la presència de l’edifici. És a dir, suposem que volem fer una tanca rectangular de la superfície màxima, de manera que tot el perímetre de la tanca sigui 200 m.

Com vèiem en l'activitat anterior, la solució és ara un quadrat, no un rectangle.

De vegades caldrà confirmar si els punts crítics que hem obtingut són màxims o mínims; per aconseguir-ho es pot fer servir el mètode de la segona derivada, que ja hem vist en la secció 1.5. Vegem-ne un exemple.

A25

Volem construir una caixa que tingui una base tres vegades més llarga que ampla. El material que es fa servir per a construir la part superior i inferior de la caixa costa 100 €/m^2, i el que es fa servir per als costats costa 50 €/m^2. Si la caixa ha de tenir un volum de 2 m^3, amb quines dimensions es minimitzen els costos?

Ajut: Elimina la variable altura del problema, per tal de minimitzar la funció resultant.

Com hem vist en els exemples anteriors, s'ha de reduir el problema de dues o més variables a un d'una sola variable. Cal una mica de pràctica per a saber quina variable convé eliminar. Vegem-ne un exemple.

A26

Repeteix el problema de l'A25 però elimina la variable amplària, a, en lloc de l'altura, h.

Se simplifica la resolució del problema?

Els problemes que es resolen per optimització de vegades tenen solucions que no tenen sentit, i cal descartar-les. Vegem-ne un exemple.

A27

Volem construir una caixa de base quadrada amb 10 m^2 de material i que tingui un volum màxim quan fem servir tot el material.

En els dos exemples anteriors hem tingut situacions oposades. En l'A25 el volum era la restricció i l'àrea (o el cost) era la funció que volíem optimitzar. En l'A27, per altra banda, volem optimitzar el volum i la restricció era l'àrea de la caixa.

Per tant, cal estar ben atents a quina és la funció i quina és la restricció en cada problema d'optimització.

Vegem un altre exemple.

A28

Volem construir un envàs cilíndric d'1,5 l de volum. Quines dimensions ha de tenir de manera que la quantitat de material que es fa servir sigui mínima?

Nota: Per a comprovar que es tracta d'un mínim de la funció, feu servir dos mètodes: el mètode de la segona derivada i el mètode de calcular el valor de la funció o de la derivada al voltant del punt crític.

En els exemples anteriors hem treballat amb constants numèriques concretes. Però no cal perdre de vista que en matemàtiques treballem sovint amb dades que són lletres, no valors concrets, i així obtenim valors més generals. Vegem-ne un exemple.

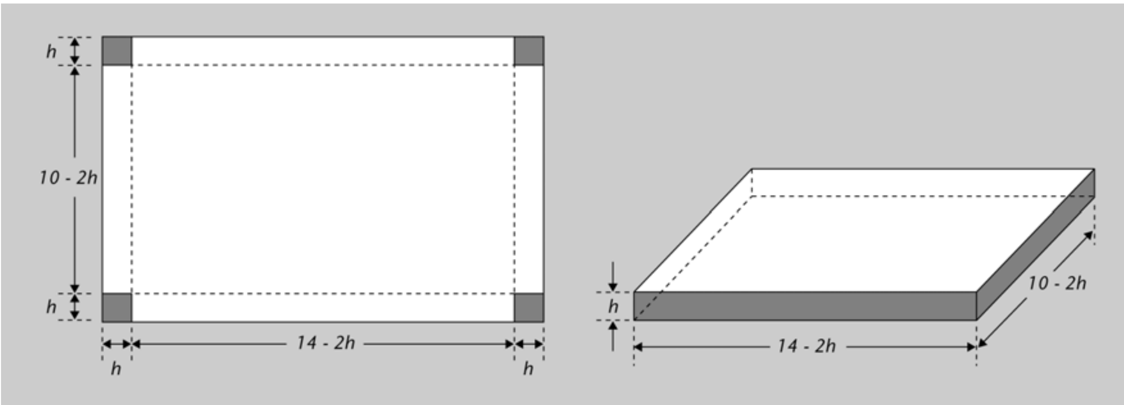
A29

Demostreu que per a un volum concret V, la quantitat de material que s'utilitza en construir un receptacle cilíndric és mínim si $h = 2r$, és a dir, l'altura del cilindre coincideix amb el diàmetre de la base cilíndrica, independentment del volum de l'envàs.

De vegades la restricció del problema no es pot escriure en forma d'equació, com veiem en l'exemple següent.

A30

Tenim un tros de cartró de 14 cm × 10 cm i hi volem tallar els cantons per a fer una caixa, com mostra la figura següent. Determineu l'altura de la caixa que en maximitzarà el volum.



Hem fet diversos exercicis en què la condició estava expressada en forma d'àrea i la funció que maximitzàvem era un volum, o a l'inrevés. En l'exercici següent, tant la condició com la funció que maximitzarem són dues àrees.

A31

Volem fer un pòster de 400 cm^2 d'àrea total i amb 2 cm de marges laterals, 3 cm de marge superior i 2,5 cm de marge inferior. Quines dimensions donaran l'àrea impresa més gran?

I fem un exercici semblant.

A32

La part baixa d'una finestra és rectangular i la superior és un semicercle. Si tenim 12 m de material per a fer-la (material del perímetre de la finestra), quines dimensions ha de tenir perquè deixi entrar el màxim de llum?

I un altre però ara amb valors numèrics.

A33

Determineu l'àrea del rectangle més gran que es pugui inscriure en un cercle de radi 4.

En general cal trobar tots els punts crítics i veure quins són acceptables en cada cas, com ara veurem.

A34

Determineu els punts sobre $y = x^2 + 1$ que són més a prop del punt (0, 2).

Nota: En resoldre el problema, elimineu la variable y per a treballar amb una funció només de x.

De vegades el camí que sembla més curt no ho és. Vegem l'activitat següent.

A35

Repetiu l'activitat A34 però ara elimineu la variable x en lloc de la y.

I amb l'exemple anterior hem vist un bon recull de problemes d'optimització que ens donen una idea de les dificultats que s'hi poden presentar.

Recapitulació

A36

Elaboreu un esquema que resumeixi el procediment per a calcular els màxims i mínims d'una funció en un interval $[a, b]$.

Resolució d'activitats

A1

En primer lloc, calculem la derivada de la funció,

$$g'(x) = -6 + 20\sin(2x)$$

La funció no canvia quan el ritme de canvi és nul,

$$g'(x) = 0$$

és a dir,

$$-6 + 20\sin(2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2x) = 0.3 \Rightarrow \quad 2x = \arcsin(0.3)$$

i la solució és:

$$2x = 0.3047 + 2\pi n \quad \text{o bé} \quad 2x = \pi - 0.3047 + 2\pi n = 2.8369 + 2\pi n \qquad \text{amb} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...$$

i, en termes de la variable x,

$$x = 0.1524 + \pi n \quad \text{o bé} \quad x = 1.4185 + \pi n \qquad \text{amb} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...$$

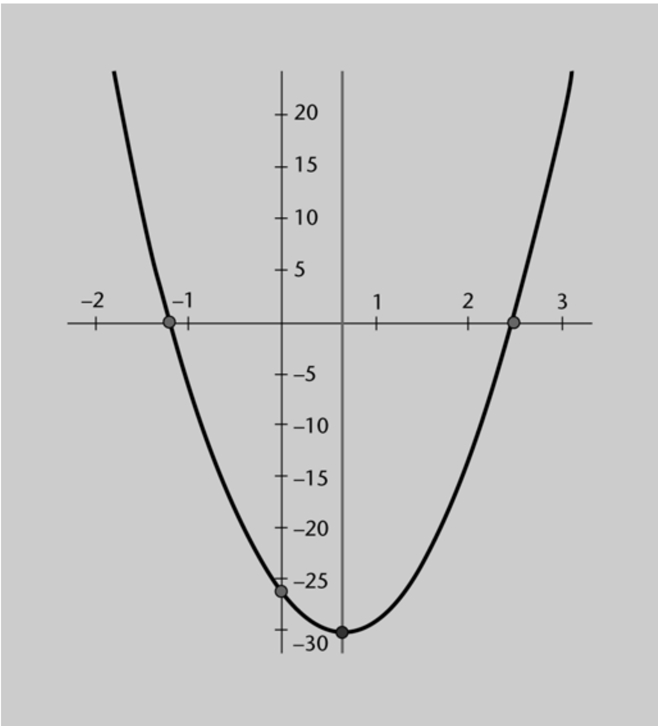
A2

En primer lloc derivem la funció,

$$A'(t) = 135t^4 - 180t^3 - 390t^2 = 15t^2\left(9t^2 - 12t - 26\right)$$

Per tal de veure quan la funció és creixent o decreixent, hem de determinar on és positiva o negativa la seva derivada: si la derivada és positiva la funció és creixent, i si la derivada és negativa la funció és decreixent.

En la funció $A'(t)$ el factor $15t^2$ no canvia de signe per a cap valor de t i és sempre positiu. L'altre factor, $9t^2 - 12t - 26$, és una paràbola les branques de la qual se'n van a l'infinit, talla l'eix x en dos punts, és positiva per a valors molt grans de t, tant $t > 0$ com $t < 0$ i, en canvi, per a valors propers a zero és negativa perquè el terme –26 domina sobre els altres dos, $9t^2 - 12t$ (podeu provar amb un valor com ara $t = 0.001$).



Els punts de tall són

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 9 \times (-26)}}{18} = \frac{2 \pm \sqrt{30}}{3} = \begin{cases} -1.159 \\ 2.492 \end{cases}$$

Per tant, els intervals de creixement/decreixement de la funció són:

Creixent: $-\infty < t < -1.159$ i $2.492 < t < \infty$
Decreixent: $-1.159 < t < 2.492$

A3

Calculem la derivada de la funció,

$$f'(x) = 30x^4 + 132x^3 - 90x^2 = 6x^2(5x-3)(x+5)$$

Com que la funció i la seva derivada són polinomis, existiran per a tots els valors de x. Els únics punts crítics seran els que anul·len la derivada, és a dir,

$$6x^2(5x-3)(x+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5, \quad 0, \quad 5/3$$

A4

En aquest cas, és més senzill calcular la derivada si primer operem:

$$g(t) = 2t^{5/3} - t^{2/3}$$

i ara derivem:

$$g'(t) = \frac{10}{3}t^{2/3} - \frac{2}{3}t^{-1/3} = \frac{10t^{2/3}}{3} - \frac{2}{3t^{1/3}}$$

Veiem que $t = 0$ és un punt crític de la funció perquè $g'(0)$ no existeix però $g(0)$, sí.

Els altres punts crítics possibles surten de fer $g'(t) = 0$:

$$g'(t) = \frac{10t^{2/3}}{3} - \frac{2}{3t^{1/3}} = \frac{10t-2}{3t^{1/3}} = 0$$

En aquesta darrera forma veiem que $t = 0$ és un punt crític, com ja sabem, i, a més a més, $10t = 2$, o sigui $t = 1/5$.

A5

a)

$$h'(t) = 10\mathrm{e}^{3-t^2} + 10t\mathrm{e}^{3-t^2}(-2t) = 10\mathrm{e}^{3-t^2} - 20t^2\mathrm{e}^{3-t^2} = 10\mathrm{e}^{3-t^2}\left(1-2t^2\right)$$

Tant la funció com la seva derivada són exponencials multiplicades per polinomis; per tant, existeixen per a qualsevol valor de t. L'exponencial no s'anul·la en cap punt i, en conseqüència, l'única possibilitat perquè la derivada s'anul·li és que

$$1 - 2t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) La funció només existeix per a $x > 0$. Vegem quin és el domini de la seva derivada i quan s'anul·la:

$$f'(x) = 2x\ln(3x) + x^2\frac{1}{x} = x\left(2\ln(3x) + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(3x) = -1/2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}e^{-1/2} \end{cases}$$

Desestimem $x = 0$ perquè no forma part del domini de la funció. Com que el domini de la derivada coincideix amb el de la funció, l'únic punt crític és $x = \frac{1}{3}e^{-1/2}$.

A6

$$f'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}(2x) = e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$$

La derivada no s'anul·la per a cap valor real de x i existeix per a tot x; per tant, la funció no té punts crítics.

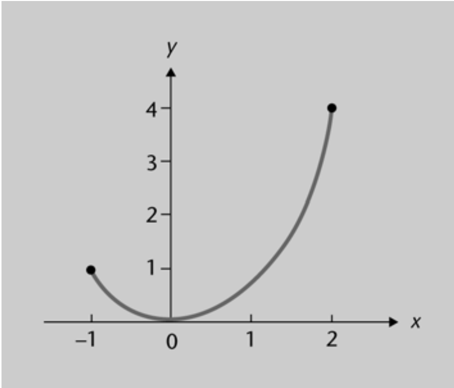
A7

La figura següent mostra la gràfica de la funció, en el domini indicat. Hem dibuixat punts grossos en els extrems de la gràfica per a indicar on s'acaba.

Tenim un mínim relatiu i absolut de valor $f(0) = 0$ en el punt $x = 0$, i un màxim absolut de valor $f(2) = 4$ en el punt $x = 2$.

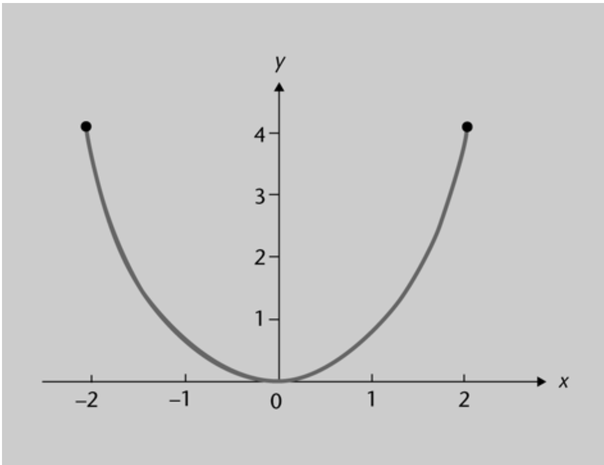
El punt $x = -1$ no és un màxim relatiu perquè és un punt extrem de l'interval.

La funció no té cap màxim relatiu.



A8

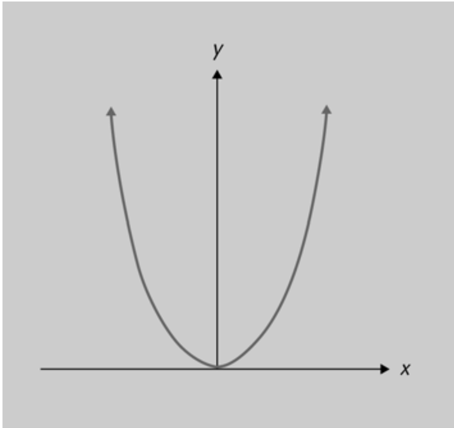
La gràfica de la funció mostra que té un valor mínim absolut i relatiu en $x = 0$. També tenim un màxim absolut de valor 4 en els dos punts extrems del domini, $x = -2$ i $x = 2$. Aquesta funció tampoc no té màxims relatius.



A9

No es dóna el domini de la funció i per tant hem de considerar-lo tan gran com sigui possible. En aquest cas, es tractaria de tots els nombres reals. La gràfica mostra que la funció creix sense límits en els dos extrems i, per tant, no té màxims ni absoluts ni relatius.

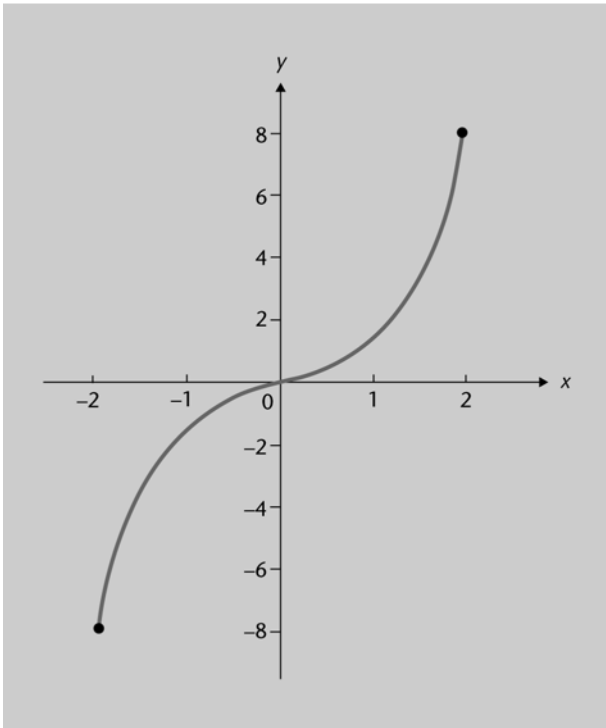
La funció té un mínim absolut i relatiu de valor 0 en el punt $x = 0$.



Per tant, una funció pot tenir mínims i no tenir màxims, o a l'inrevés.

A10

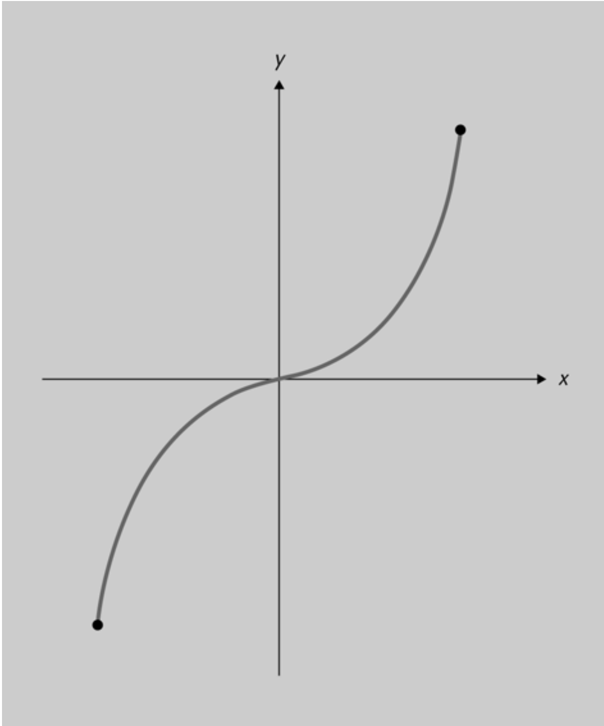
La figura mostra la gràfica de la funció, que té un valor absolut igual a 8 en el punt $x = 2$ i un mínim absolut igual a –8 en $x = -2$. La funció no té extrems relatius.



Per tant, una funció pot no tenir cap tipus d'extrems relatius.

A11

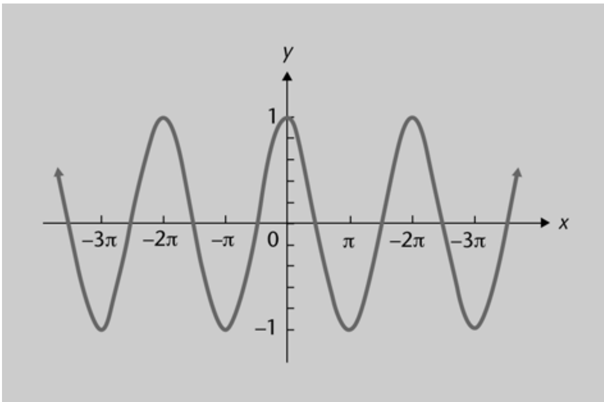
Com que no hem restringit el domini de la funció, la seva representació és la de la figura següent:



Per tant, una funció pot no tenir cap tipus de punts extrems, ni absoluts ni relatius.

A12

Com que no s'ha restringit el domini d'aquesta funció, la gràfica és la de la funció cosinus, ben coneguda.



La funció cosinus té extrems (relatius i absoluts) en molts punts. Els màxims relatius i absoluts són de valor 1 i es donen en els punts següents:

$$x = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi\ldots$$

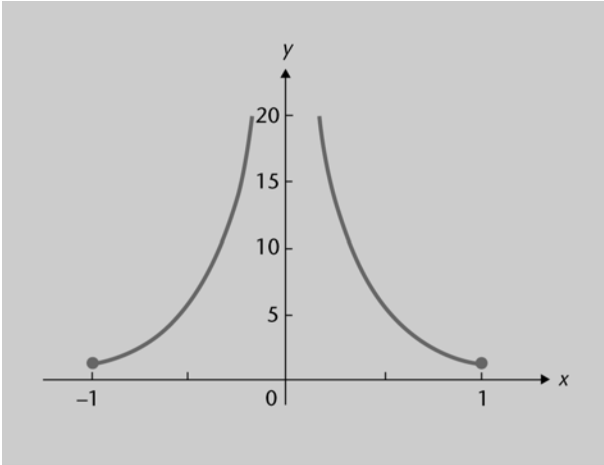
Els mínims absoluts i relatius, de valor –1, es produeixen en els punts:

$$x = \pm\,\pi,\ \pm 3\pi\ldots$$

Com veiem, una funció pot tenir extrems relatius en infinits punts.

A13

La gràfica de la funció és la següent:



Com que la funció no és contínua en $x = 0$, perquè tendeix a infinit per a $x \to 0$, el teorema del valor extrem no és aplicable i pot succeir qualsevol cosa.

La funció no té un màxim absolut. Però sí que té un mínim absolut, tant en $x = -1$ com en $x = 1$.

A14

La derivada de la funció és

$$f'(x) = 3x^2$$

Clarament, $x = 0$ és un punt crític (derivada igual a zero). Tanmateix, hem vist en l’activitat A10 que aquesta funció no té extrems relatius; per tant, els punts crítics no han de ser necessàriament extrems relatius.

A15

Com que es tracta d’un polinomi, la funció és contínua en tots els punts i, per tant, també en l’interval de definició, $t \in [-4,2]$.

Els punts crítics els obtenim de la derivada,

$$g'(t) = 6t^2 + 6t - 12 = 6(t+2)(t-1)$$

Tenim dos punts crítics, $t = -2$ i $t = 1$, i ambdós cauen dins l’interval de definició.

Avaluem la funció en els dos punts crítics i en els extrems:

$$g(-4) = -28 \qquad g(-2) = 24 \qquad g(1) = -3 \qquad g(2) = 8$$

Els extrems absoluts són els valors màxim i mínim que pren la funció i aquests quatre punts representen els únics llocs de l’interval en què es poden donar els extrems absoluts.

Veiem que el màxim absolut és a

$$g(-2) = 24 \text{ (punt crític)}$$

i el mínim absolut a

$$g(-4) = -28 \text{ (un punt extrem de l’interval).}$$

A16

Ja sabem que els punts crítics són $t = -2$ i $t = 1$, però només el punt $t = 1$ cau dins l’interval. Els valors de la funció són

$$g(0) = 4 \qquad g(1) = -3 \qquad g(2) = 8$$

Veiem que el màxim absolut és $g(2) = 8$ i el mínim absolut, $g(1) = -3$.

A17

Volem els extrems absoluts de $P(t)$ en l'interval $[0,4]$. La funció és continua per a tots els valors de t. Derivem-la:

$$P'(t) = 3 + 4\cos(4t)$$

Els punts crítics provenen d'igualar a zero la derivada; com que la funció és contínua per a tot t, no donarà altres punts crítics. De $P'(t) = 0$, obtenim

$$\cos(4t) = -3/4$$

que té les solucions següents:

$$\begin{array}{ll} 4t = 2.4189 + 2\pi n & n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2... \\ 4t = -2.4189 + 2\pi + 2\pi n = 3.8643 + 2\pi n & n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2... \end{array} \Rightarrow \begin{cases} t = 0.6047 + \dfrac{n\pi}{2} \\ t = 0.9661 + \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$

Hem de veure quins punts crítics cauen dins l'interval $[0,4]$:

$$n = 0,\ t = 0.6047,\ t = 0.9661$$

que sí que hi són.

$$n = 1,\ t = 0.6047 + \pi/2 = 2.1755,\ t = 0.9661 + \pi/2 = 2.5369$$

que sí que hi són.

$$n = 2,\ t = 0.6047 + \pi = 3.7463,\ t = 0.9661 + \pi = 4.1077$$

i només el primer punt cau dins l'interval.

Per tant, tenim cinc punts crítics en l'interval:

$$0.6047,\quad 0.9661,\quad 2.1755,\quad 2.5369,\quad 3.7463$$

Per tal de determinar quines són les poblacions mínimes i màximes absolutes hem de substituir els punts anteriors en la funció, i també els punts extrems de l'interval:

$$P(0) = 100.0,\ P(4) = 111.7121,\quad P(0.6047) = 102.4756,\quad P(0.9661) = 102.2368$$

$$P(2.1755) = 107.1880,\ P(2.5369) = 106.9492,\quad P(3.7463) = 111.9004$$

Per tant, la població mínima és 100.0 en l'instant inicial, $t = 0$, i la màxima és 111.9, per a $t = 3.7463$.

A18

Cerquem els extrems absoluts de la funció $A(t)$ en l'interval $[0,10]$. La funció és contínua per a tot t i, per tant, no hi ha problema. Derivem la funció:

$$A'(t) = -10e^{5-\frac{t^2}{8}} - 10te^{5-\frac{t^2}{8}}(-\frac{t}{4}) = 10e^{5-\frac{t^2}{8}}(-1 + \frac{t^2}{4})$$

Com que l'exponencial mai no s'anul·la, la derivada s'anul·larà quan

$$-1 + \frac{t^2}{4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \pm 2$$

Només el punt crític $t = 2$ cau dins l'interval. Avaluem la funció en aquest punt i també en els extrems de l'interval:

$$A(0) = 2\,000,\quad A(2) = 199.66,\quad A(10) = 1\,999.94$$

Per tant, el valor màxim és 2 000 en l'instant inicial, i el mínim és 199.66 per a $t = 2$.

A19

La funció és contínua en l'interval donat. Derivem-la:

$$Q'(y) = 3(y+4)^{2/3} + 3y\frac{2}{3}(y+4)^{-1/3} = \frac{3(y+4)+2y}{(y+4)^{1/3}} = \frac{5y+12}{(y+4)^{1/3}}$$

Tenim dos punts crítics, i són dins l'interval que considerem:

$y = -4$, perquè no hi ha derivada en aquest punt;
$y = -12/5$, perquè s'hi anul·la la derivada.

Avaluem-hi la funció, i fem-ho també per als extrems de l'interval:

$$Q(-5) = -15,\quad Q(-4) = 0,\quad Q(-12/5) = -9.849,\quad Q(-1) = -6.241$$

La funció té un màxim absolut per a $x = -4$ i un mínim absolut per a $y = -5$.

A20

Necessitem calcular la derivada:

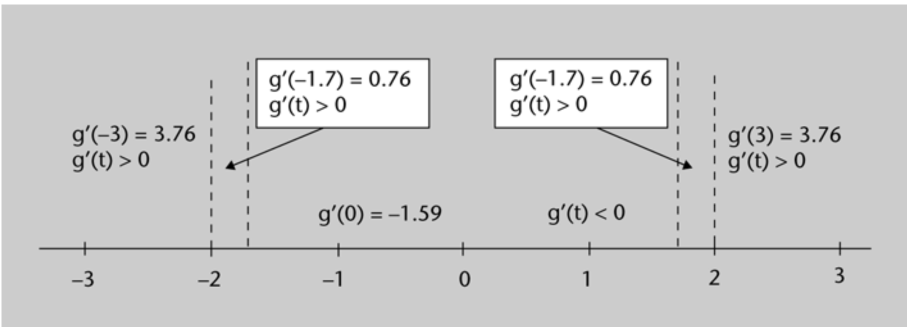
$$g'(t) = \left(t^2-4\right)^{1/3} + \frac{2}{3}t^2\left(t^2-4\right)^{-2/3} = \frac{3\left(t^2-4\right)+2t^2}{3\left(t^2-4\right)^{2/3}} = \frac{5t^2-12}{3\left(t^2-4\right)^{2/3}}$$

Per tant, tenim quatre punts crítics:

$t = \pm 2$, en què la derivada no existeix;

$t = \pm\sqrt{\dfrac{12}{5}} = \pm 1.549$, en què s'anul·la la derivada.

Marquem sobre l'eix dels nombres reals els punts crítics i el signe de la derivada en punts a esquerra i dreta.



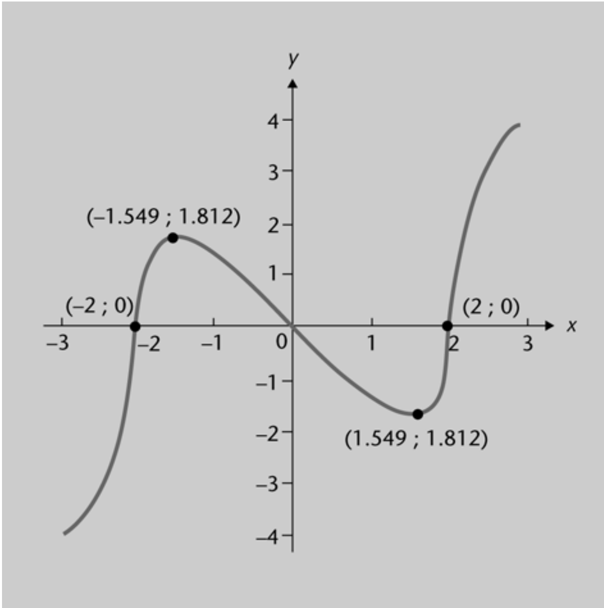
Per tant, els intervals de creixement i de decreixement són els següents:

creixement: $-\infty < x < -\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ i també $\sqrt{\dfrac{12}{5}} < x < +\infty$

decreixement: $-\sqrt{\dfrac{12}{5}} < x < \sqrt{\dfrac{12}{5}}$

Aleshores, ni $t = -2$ ni $t = 2$ són mínims ni màxims relatius, perquè la funció és creixent a ambdós costats d'aquests punts. D'altra banda, pel canvi de creixement, $t = -\sqrt{(12/5)}$ és un màxim relatiu i $t = \sqrt{(12/5)}$ és un mínim relatiu.

La gràfica de la funció és la següent:



A21

Les derivades són:

$$y' = -2x$$
$$y'' = -2 < 0$$

Per tant, la funció és convexa i té un màxim en $x = 0$.

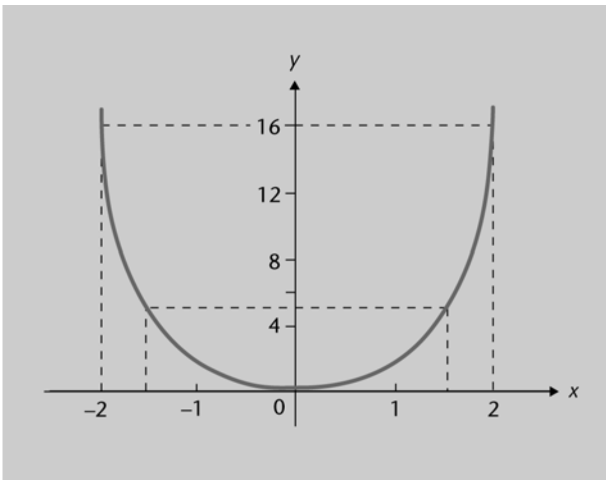
A22

En els tres casos la funció té segona derivada nul·la, $f''(0) = 0$ i tanmateix tenim:

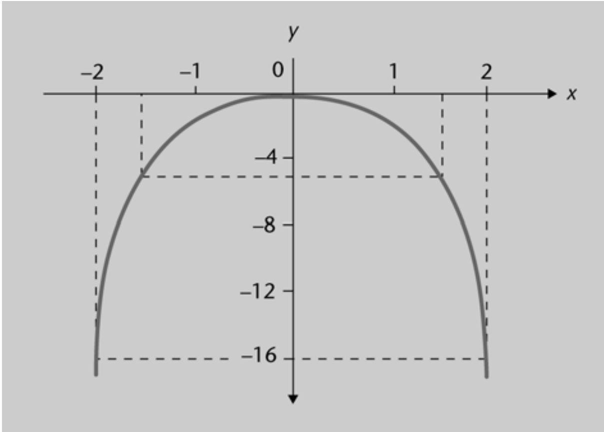
a) un mínim relatiu en $x = 0$,
b) un màxim relatiu en $x = 0$,
c) ni màxim ni mínim: un punt d'inflexió en $x = 0$.

Les gràfiques de les tres funcions són les següents:

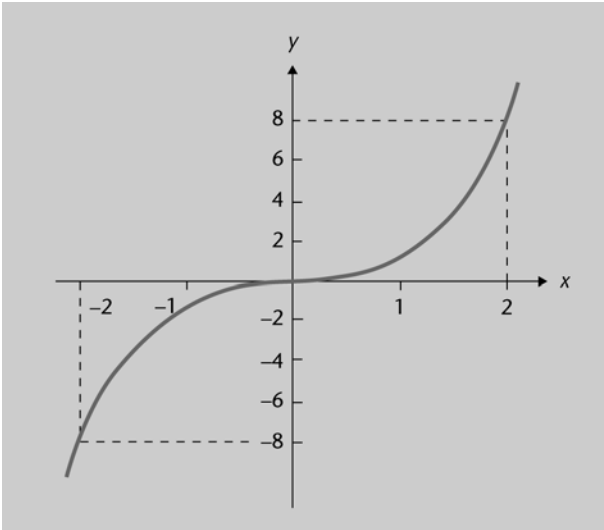
a)



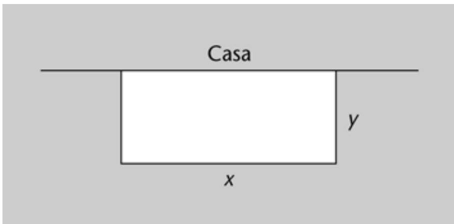
b)



c)



A23



La funció que volem optimitzar és l'àrea i la restricció és la quantitat de tanca. Les dues equacions són, doncs:

Maximitzar: $A = xy$
Restricció: $200 = x + 2y$

Una manera de resoldre el problema és eliminar la variable x, per exemple (o la variable y),

$$x = 200 - 2y$$

i així tenim una funció d'una sola variable que hem de maximitzar:

$$A(y) = (200 - 2y) \cdot y = 200y - 2y^2$$

El valor de y està restringit a l'interval [0, 100], però no pot tenir aquests dos valors perquè

$y = 0$ m seria una tanca rectangular sense un costat;
$y = 100$ m seria una tanca sense amplària.

Derivem la funció i la fem zero:

$$A'(y) = 200 - 4y$$

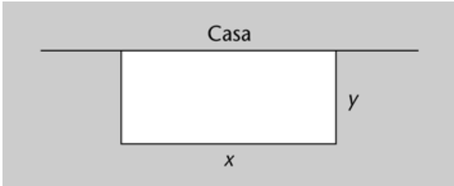
D'aquí resulta un únic punt crític,

$$y = 50 \text{ m}$$

que dóna un valor $x = 200 - 2y = 100$ m, i una àrea $A = xy = 5\,000$ m^2.

A24

El plantejament és semblant al cas anterior, però ara la tanca passa per davant la casa:



La funció que volem optimitzar és l'àrea i la restricció és la quantitat de tanca. Les dues equacions són, doncs:

Maximitzar: $A = xy$
Restricció: $200 = 2x + 2y$

Una manera de resoldre el problema és eliminar la variable x, per exemple (o la variable y),

$$x = 100 - y$$

i així tenim una funció d'una sola variable que hem de maximitzar:

$$A(y) = (100 - y) \cdot y = 100y - y^2$$

El valor de y està restringit en l'interval [0,100], però no pot tenir aquests dos valors perquè:

$y = 0$ m seria una tanca rectangular sense un costat;
$y = 100$ m seria una tanca sense amplària.

Derivem la funció i la fem zero:

$$A'(y) = 100 - 2y$$

D'aquí resulta un únic punt crític,

$$y = 50 \text{ m},$$

que dóna un valor $x = 100 - y = 50$ m, i una àrea $A = xy = 2\,500$ m^2.

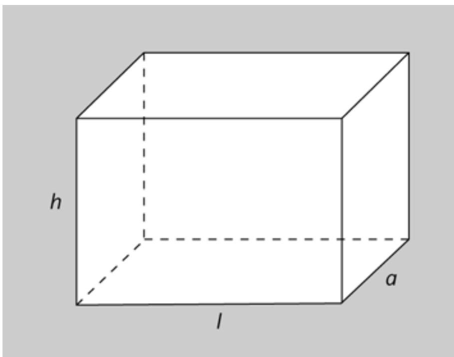
Com veiem, la solució és ara un quadrat, no un rectangle.

Nota

Aquest problema és semblant al que permet calcular la figura geomètrica que té una superfície mínima, per a un volum concret, que és l'esfera.

A25

El cost de fer cada cara és el producte de l'àrea pel preu corresponent.



Volem minimitzar la funció

$$C = 100(2la) + 50(2ah + 2lh)$$

amb la condició $l = 3a$ i la restricció

$$2\text{m}^3 = lah = 3a^2h$$

Tenim una funció C de dues variables i una equació de restricció. Per tant, hi podem eliminar la variable h:

$$h = \frac{2}{3a^2}$$

Amb l'expressió anterior i la condició $l = 3a$, obtenim:

$$C = 600a^2 + 50(2ah + 6ah) = 600a^2 + 400ah = 600a^2 + \frac{800}{3a}$$

La derivem i igualem a zero:

$$C'(a) = 1\,200a - \frac{800}{3a^2} = 0 \Rightarrow 3600a^3 - 800 = 0 \Rightarrow 400(9a^3 - 2) = 0$$

i resulta:

$$a = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$$

Aquest punt és el valor requerit. Però ens hem d'assegurar que el cost de la capsa corresponent serà mínim i no màxim!

Com que la segona derivada és positiva per a qualsevol $a > 0$ (és còncava),

$$C''(a) = 1\,200 + \frac{1600}{3a^3} > 0$$

i, per tant, la funció tindrà un mínim en el punt calculat. El cost mínim, en euros, serà:

$$C\left(a = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) = 600\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2 + \frac{800}{3\sqrt[3]{\frac{2}{9}}} = 660.38$$

I les dimensions han de ser: $a = \sqrt[3]{\frac{2}{9}} = 0.606$, $l = 3\sqrt[3]{\frac{2}{9}} = 1.817$, $h = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 1.817$

A26

Volem minimitzar la funció

$$C = 100(2la) + 50(2ah + 2lh)$$

amb la condició $l = 3a$ i la restricció

$$2\text{m}^3 = lah = 3a^2h$$

Tenim una funció C de dues variables i una equació de restricció. Per tant, hi podem eliminar la variable a:

$$a = \sqrt{\frac{2}{3h}}$$

Amb l'expressió anterior i la condició $l = 3a$, obtenim:

$$C = \frac{400}{h} + 400h\sqrt{\frac{2}{3h}} = \frac{400}{h} + 400\sqrt{\frac{2h}{3}}$$

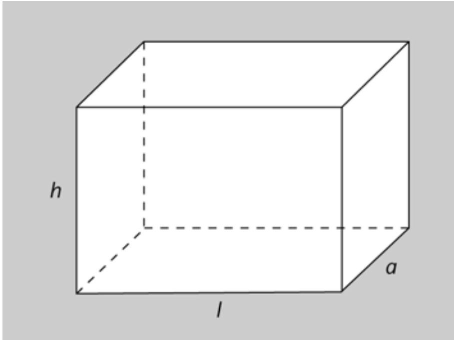
La derivem i igualem a zero:

$$C'(h) = -\frac{400}{h^2} + 400\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(\frac{2h}{3}\right)^{-1/2} = 400\left(-\frac{1}{h^2} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2h}}\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{2h}} = \frac{3}{h^2} \Leftrightarrow \frac{3}{2h} = \frac{9}{h^4} \Leftrightarrow 3h^4 = 18h \Leftrightarrow 3h(h^3 - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ h = \sqrt[3]{6} = 1.817 \end{cases}$$

Ara caldria comprovar també que el cost de la capsa corresponent serà mínim, i no màxim.

A27



Volem maximitzar-ne el volum,

$$V = lah$$

amb la restricció

$$10 = 2la + 2ah + 2lh$$

i la condició:

$$l = a$$

Podem eliminar la variable l de les dues equacions:

$$V = a^2 h$$
$$10 = 2a^2 + 4ah$$

i, si ara eliminem h, obtenim una fórmula en què només tenim la variable a:

$$h = \frac{10 - 2a^2}{4a}$$
$$V(a) = a^2\left(\frac{5 - a^2}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(5a - a^3\right)$$

Derivem:

$$V'(a) = \frac{1}{2}\left(5 - 3a^2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

El valor negatiu de a no té sentit com a longitud d'una capsa. Per tal de veure si $a = +\sqrt{\frac{5}{3}}$ correspon a un màxim o a un mínim del volum, calculem la segona derivada de V en aquest punt:

$$V'(a) = -3a < 0$$

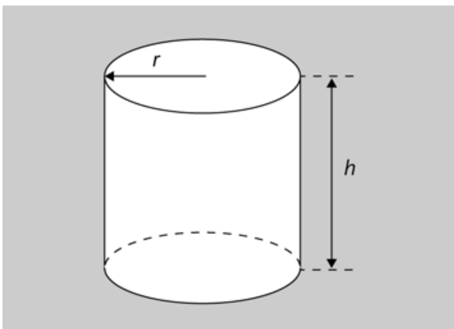
Es tracta, doncs, d'una funció convexa de a i el volum corresponent és un màxim. Les dimensions optimitzades de la capsa són, per tant:

$$h = l = a = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Es tracta d'una capsa cúbica.

A28

Podríem representar l'envàs d'aquesta manera:



Volem minimitzar la superfície total de l'envàs, incloses les tapadores. El volum del cilindre és igual a l'àrea de la base per l'altura,

$$V = \pi r^2 h$$

i l'àrea lateral, sumada a l'àrea de les bases, és:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

La restricció és:

$$V = 1.5L$$

que podem fer servir per a eliminar la variable *h*:

$$h = \frac{1.5}{\pi r^2}$$

En conseqüència, l'àrea és:

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{1.5}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{3}{r}$$

La primera derivada de l'àrea és:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{3}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 3}{r^2}$$

que s'anul·la en el punt que compleix

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

Podem calcular la segona derivada i veure que el volum correspon a un mínim. Però en lloc d'això farem servir un altre mètode: calcularem la primera derivada en punts als dos costats i propers a $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$.

Per exemple, si $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} - 0.1$ resulta $A'(r) < 0$ i si $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} + 0.1$ resulta que $A'(r) > 0$. Per tant, la funció passa de decreixent a creixent a mesura que *r* creix al voltant del punt que anul·la la primera derivada. Això vol dir que la funció té un mínim en aquest punt.

El resultat és, doncs,

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0.6203$$

$$h = \frac{1.5}{\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}} = 1.2407$$

A29

El volum és constant i val

$$V = \pi r^2 h$$

d'on eliminem *h:*

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

L'àrea lateral, sumada a l'àrea de les bases, és:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

on, substituint la h, obtenim:

$$A(r) = \frac{2\pi rV}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

$$A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{2V}\right)^2}$$

I ara, fent manipulacions algèbriques del resultat per a h, hem de comprovar que és el doble que r:

$$h = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{2V}\right)^2 \frac{4\pi}{2V}\frac{2V}{4\pi}} = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{2V}\right)^3}\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \frac{V}{\pi}\frac{4\pi}{2V}\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = 2r$$

A30

El volum de la capsa que volem maximitzar és:

$$V(h) = h(14-2h)(10-2h)$$

Ara no tenim una equació per a la restricció, perquè la condició de l'àrea del centre del cartró ja l'hem fet servir en el dibuix.

Derivem i igualem a zero:

$$V(h) = 140h - 48h^2 + 4h^3$$
$$V'(h) = 140 - 96h + 12h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 35 - 24h + 3h^2 = 0$$

D'aquí resulta:

$$h = \frac{24 \pm \sqrt{156}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{39}}{3} = \begin{cases} 1.9183 \\ 6.0817 \end{cases}$$

Hem de veure quin dels dos resultats dóna el volum màxim. Podem veure en el dibuix de la capsa que el valor màxim de h és h = 5 cm. Per tant, la solució h = 6.0817 cm no té sentit.

Com que

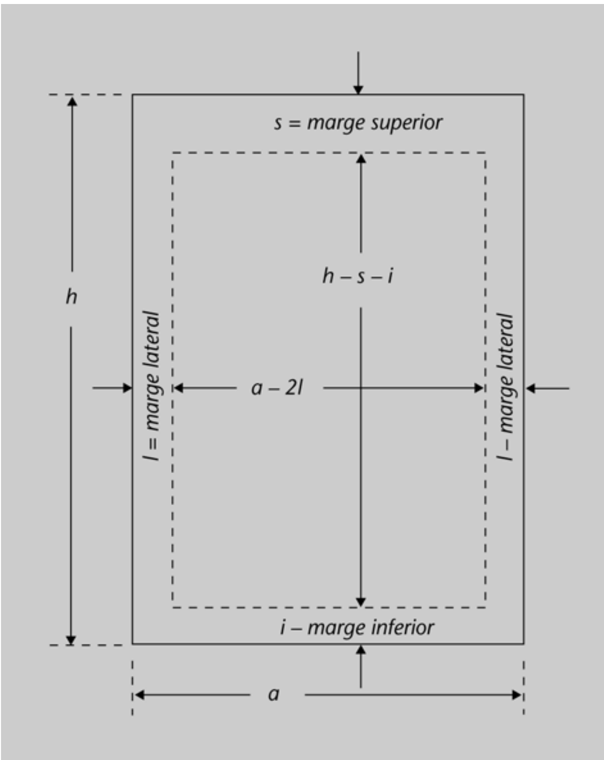
$$V''(h) = -96 + 24h$$
$$V''(h = 1.9183) < 0$$

es tracta d'un volum màxim:

$$V(h = 1.9183\ \text{cm}^3) = 120.1644\ \text{cm}^3$$

A31

La restricció és l'àrea total del pòster i volem optimitzar l'àrea impresa (és a dir, l'àrea del pòster quan n'excloem els marges). L'esquema del pòster és el següent:



En forma d'equacions, hem de maximitzar l'àrea

$$A = (a-4)(h-5.5)$$

amb la restricció

$$400 = ah$$

Hi podem eliminar h:

$$A(a) = (a-4)\left(\frac{400}{a} - 5.5\right) = 422 - 5.5a - \frac{1\,600}{a}$$
$$A'(a) = -5.5 + \frac{1\,600}{a^2} = 0$$
$$a = \sqrt{\frac{3\,200}{11}}$$

La segona derivada sempre és negativa,

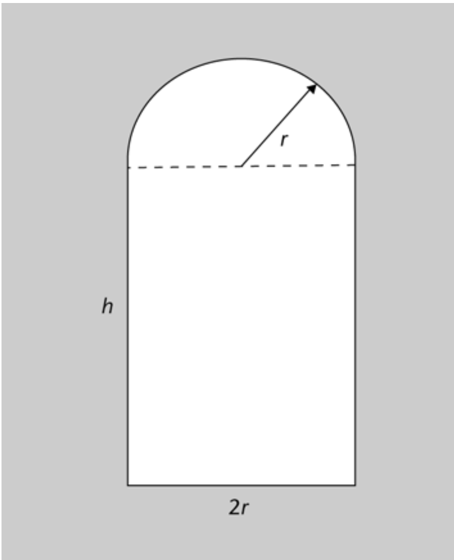
$$A''(a) = -2\frac{1\,600}{a^3} < 0$$

i, per tant, es tracta d'un màxim. Resulta:

$$h = 400\sqrt{\frac{11}{3\,200}} = 10\sqrt{\frac{11}{2}}$$
$$A = \left(\sqrt{\frac{3\,200}{11}} - 4\right)\left(10\sqrt{\frac{11}{2}} - 5.5\right)$$

A32

Volem una finestra que tingui la forma de la figura següent i que tingui l'àrea màxima per a un perímetre concret de 12 m.



Si el radi del cercle és r, la base de la finestra seria $2r$. El perímetre és la longitud dels tres costats de la part rectangular més la meitat d'un cercle de radi r. L'àrea que volem maximitzar és la del rectangle sumada a la meitat de la del cercle de radi r.

En resum, doncs, volem maximitzar la funció

$$A = (2r)h + \tfrac{1}{2}\pi r^2$$

amb la restricció

$$12 = 2h + 2r + \pi r$$

Hi eliminem h,

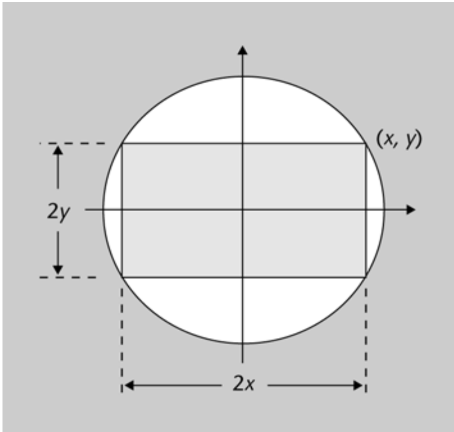
$$A(r) = 2r(6 - r - \tfrac{1}{2}\pi r) + \tfrac{1}{2}\pi r^2 = 12r - r^2(2 + \frac{\pi}{2})$$
$$A'(r) = 12 - r(4+\pi)$$
$$A''(r) = -(4+\pi) < 0$$

D'igualar a zero la primera derivada obtenim:

$$r = \frac{12}{4+\pi} = 1.6803$$

Com que la segona derivada és negativa, es tracta d'una àrea màxima de la finestra per a aquest radi.

A33



Mireu l'esquema d'allò que ens demanen. Volem l'àrea del rectangle més gran que podem inscriure de manera que els quatre vèrtexs toquin el cercle. Si el cercle està centrat en l'origen, l'equació del cercle és

$$x^2 + y^2 = 16$$

i les coordenades de l'extrem superior dret del rectangle són (x, y). L'àrea del rectangle, si aïllem y de la restricció anterior, serà:

$$A = (2x)(2y) = 4xy = 4x\sqrt{16-x^2}$$

Derivem-la:

$$A'(x) = 4\sqrt{16-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{4\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2 - 4x^2}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{64-8x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

Sembla clar que podem limitar x en l'interval

$$0 \le x < 4$$

perquè estem suposant que x és dins del primer quadrant i no pot arribar al radi del cercle. Així no tenim problemes amb el radicand del denominador de la primera derivada.

Si igualem a zero la derivada, resulta:

$$x = \pm\, 2\sqrt{2}$$

L'únic punt vàlid és el positiu, i per tant,

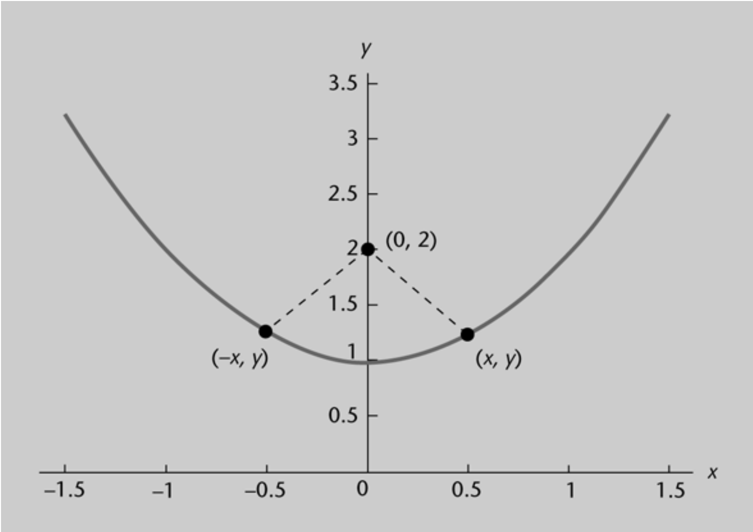
$$x = y = 2\sqrt{2}$$
$$A = 32$$

Es tracta d'un quadrat.

Per tal de comprovar que es tracta d'un màxim, haurem de calcular la derivada segona. Us ho deixem com a exercici.

A34

Fem un esquema de la situació...



Estem interessats en la longitud mínima de la línia de traços. Si aquesta distància no és la que hi ha des del punt $x = 0$, hi haurà dos punts de la gràfica que seran solució, perquè la gràfica és simètrica respecte de l'eix Y, i el punt des del qual mesurem distàncies és sobre l'eix Y.

La distància entre el punt (0, 2) i un punt (x, y) és

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Si ens adonem que quan la distància anterior és mínima també ho serà el valor de d^2, serà més senzill treballar amb el quadrat de la distància. En definitiva, volem minimitzar la funció

$$D = \mathrm{d}^2 = x^2 + (y-2)^2$$

La restricció és que el punt (x, y) sigui sobre la paràbola

$$y = x^2 + 1$$

Aleshores hi podem eliminar la variable y i derivar la funció de x:

$$D(x) = x^2 + (x^2 + 1 - 2)^2 = x^4 - x^2 + 1$$
$$D'(x) = 4x^3 - 2x = 2x\left(2x^2 - 1\right)$$
$$D''(x) = 12x^2 - 2$$

Tenim tres punts crítics:

$$x = 0$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

No podem excloure els valors negatius ni el zero, en principi. Substituïts en la segona derivada obtenim:

$$D''(0) = -2 < 0 \qquad D''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 \qquad D''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4$$

Per tant, en $x = 0$ hi ha un màxim relatiu i no serà la distància mínima que cerquem. Tenim dos punts crítics que donen la mateixa distància mínima relativa i que, pel context del problema, podem assegurar que és la mínima absoluta. Una altra estratègia per a decidir si és un mínim absolut seria estudiar el signe de la derivada. Si $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ podem veure que $D'(x) < 0$ i, per tant, la funció distància és decreixent fins que arriba al punt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. És a dir, la distància sempre serà més gran que en el punt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, on és mínima. Anàlogament, podem veure que si $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$ resulta $D'(x) > 0$, i la funció distància és creixent a la dreta del punt $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ fins que s'arriba a x = 0, on la distància torna a decréixer fins arribar a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i canviar altra vegada a creixent. És a dir, la distància sempre serà més gran que en el punt $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en què és mínima. En definitiva, veiem que la funció distància té un valor mínim absolut i l'assoleix en els punts $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Substituïm i obtenim els punts (x, y) més propers al punt (0, 2):

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$$

A35

De $y = x^2 + 1$ traiem que $x^2 = y - 1$. La funció que volem minimitzar ara és

$$\begin{aligned} &D(y) = x^2 + (y-2)^2 = y - 1 + (y-2)^2 = y^2 - 3y + 3 \\ &D'(y) = 2y - 3 \\ &D''(y) = 2 > 0 \end{aligned}$$

Tenim un sol punt crític, $y = 3/2$, i com que la derivada segona sempre és positiva, sabem que la funció és còncava i que té un mínim absolut.

Ara trobem els valors de

$$x^2 = y - 1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hem trobat la mateixa solució que en l'activitat anterior però amb molt menys esforç.