Integració

Integral de Riemann

Mei Calm
Ramon Masià
Joan Carles Naranjo
Núria Parés
Francesc Pozo
Jordi Ripoll
Teresa Sancho

PID_00212664
Mòdul 2.2

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció 5

1. Integral de Riemann i teorema fonamental del càlcul 7
- 1.1. Integral de Riemann 7
  - 1.1.1. Idea intuïtiva 7
  - 1.1.2. Idea per a aproximar l'àrea 7
  - 1.1.3. Definició formal 10
- 1.2. Teorema fonamental del càlcul 14
- 1.3. Propietats de la integral de Riemann 17

2. Aplicacions de la integral de Riemann: càlcul d'àrees 18
- 2.1. Àrea delimitada per una funció i l'eix d'abscisses 18
- 2.2. Àrea delimitada per dues funcions qualssevol 21

Solucions als exercicis 25

Resolució detallada dels exercicis 26

Bibliografia 33

Introducció

La integral de Riemann permet calcular l'àrea limitada per la gràfica d'una funció i l'eix d'abscisses. El problema del càlcul d'àrees és anterior al problema de l'operació, la integració tal com l'hem estudiat en el tema anterior. En tot cas, és gràcies al teorema fonamental del càlcul que totes dues idees conflueixen: l'àrea tancada per la gràfica d'una funció es calcula avaluant una primitiva d'aquesta funció en certs punts.

1. Integral de Riemann i teorema fonamental del càlcul

1.1. Integral de Riemann

En aquest tema estudiarem l'anomenada integral de Riemann, que té per objectiu el càlcul de l'àrea limitada per la gràfica d'una funció i l'eix d'abscisses. Tot i que aquest tema és posterior al del càlcul de primitives o d'integrals indefinides, històricament el problema del càlcul d'àrees és anterior al problema de l'operació inversa de la derivada. A continuació veurem com lligar aquestes dues idees.

Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemàtic alemany (Breselenz, Hannover, 1826 - Selesca, Llac Major, 1866).

1.1.1. Idea intuïtiva

Donada una funció $f(x)$ fitada i positiva, volem resoldre el problema de determinar l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes verticals $x = a$ i $x = b$. Podeu veure un exemple de l'àrea a determinar en la figura 1.

Figura 1. Àrea sota una funció

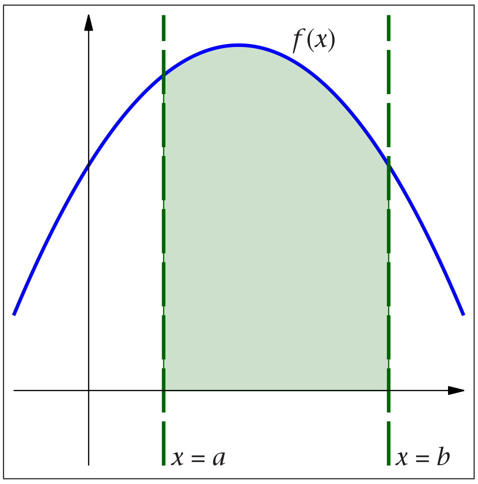


Figura 1

Àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix d'abscisses i les rectes verticals $x = a$ i $x = b$.

Si la funció fos una funció constant, el càlcul de l'àrea es limitaria a calcular l'àrea d'un rectangle. És evident, però, que l'àrea que volem calcular ara no es pot determinar com l'àrea d'un rectangle..., però podem fer servir aquesta idea.

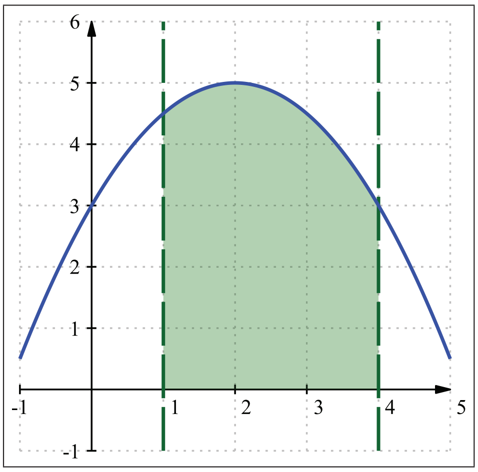
1.1.2. Idea per a aproximar l'àrea

Anem a buscar una aproximació a l'àrea limitada per la gràfica d'una funció. Considerem, per fixar idees, una funció, com ara la paràbola

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3.$$

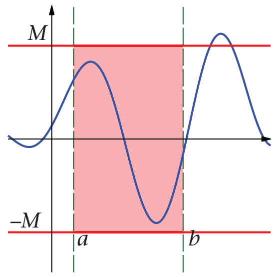
Aquesta és una funció fitada i positiva. Volem calcular l'àrea sota la gràfica d'aquesta funció entre les rectes verticals $x = 1$ i $x = 4$.

Figura 2. Àrea sota la funció $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$



Funció fitada

Quan diem que una funció és fitada en un interval tancat $[a,b]$, volem dir que existeix un valor M tal que $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in [a,b]$. És a dir, que tots els valors que pren la funció en $[a,b]$ cauen en l'interval $[-M,M]$ en l'eix OY com es pot veure en la figura.



L'esquema que seguirem per aproximar l'àrea és el següent:

- Considerarem uns quants punts equiespaiats entre $x = 1$ i $x = 4$, com ara $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ i $x_3 = 4$, que ens dividiran l'interval inicial en uns quants subintervals (tres en aquest cas).

- Amb l'interval determinat pels primers dos punts, $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$, considerarem el punt mig $x_{01} = \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ i construirem un rectangle d'altura $h_{01} = f(x_{01}) = -1{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 + 3 = 39/8 = 4{,}875$. Fem el mateix amb la resta de subintervals per obtenir les diferents altures dels rectangles:

$$h_{12} = f(x_{12}) = f(2{,}5) = 39/8 = 4{,}875$$

$$h_{23} = f(x_{23}) = f(3{,}5) = 31/8 = 3{,}875$$

- Finalment, aproximem l'àrea sota la corba en cada un dels intervals per l'àrea del rectangle de base la longitud del subinterval i alçada, els valors de la funció en x_{12} i x_{23}, que són h_{12} i h_{23}. Per tant, l'àrea total és aproximada per a la suma de les àrees dels rectangles:

$$s(f) = h_{01}(x_1 - x_0) + h_{12}(x_2 - x_1) + h_{23}(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{39}{8} + \frac{39}{8} + \frac{31}{8} = \frac{109}{8} = 13{,}625$$

en què $s(f)$ és l'aproximació de l'àrea associada als punts que hem escollit.

Figura 2

Àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$, l'eix d'abscisses i les rectes verticals $x = 1$ i $x = 4$.

Figura 3. Aproximació de l'àrea

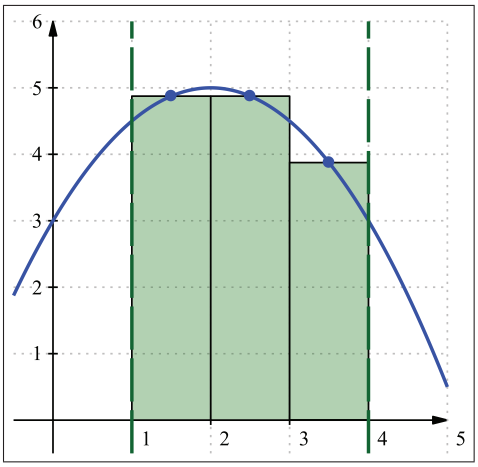


Figura 3

Càlcul de l'aproximació de l'àrea de la funció $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$ quan es consideren els punts $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ i $x_3 = 4$.

En aquest cas, representat en la figura 3, l'aproximació de l'àrea és $s(f) = 13{,}625$, mentre que el valor exacte de l'àrea és $A = 13{,}5$.

Fixeu-vos que si volem obtenir una millor aproximació de l'àrea, només cal que considerem més rectangles, de manera que aquests s'adaptin millor a la funció.

Tot i que és laboriós, és fàcil calcular aproximacions de l'àrea augmentant el nombre de rectangles (o equivalentment d'intervals). En la figura 4, podeu veure les aproximacions que s'obtenen considerant 6, 9, 12 i 15 intervals d'igual longitud. Fixeu-vos que, augmentant el nombre de rectangles, el valor de l'aproximació de l'àrea s'acosta cada cop més al valor exacte de l'àrea, que és de 13,5.

Càlcul laboriós

Tot i que l'aproximació a l'àrea sota una corba com a suma d'àrees de rectangles és laboriós, la informàtica permet avui en dia fer aquests càlculs d'una manera ben senzilla.

Figura 4. Aproximació de l'àrea variant el nombre d'intervals

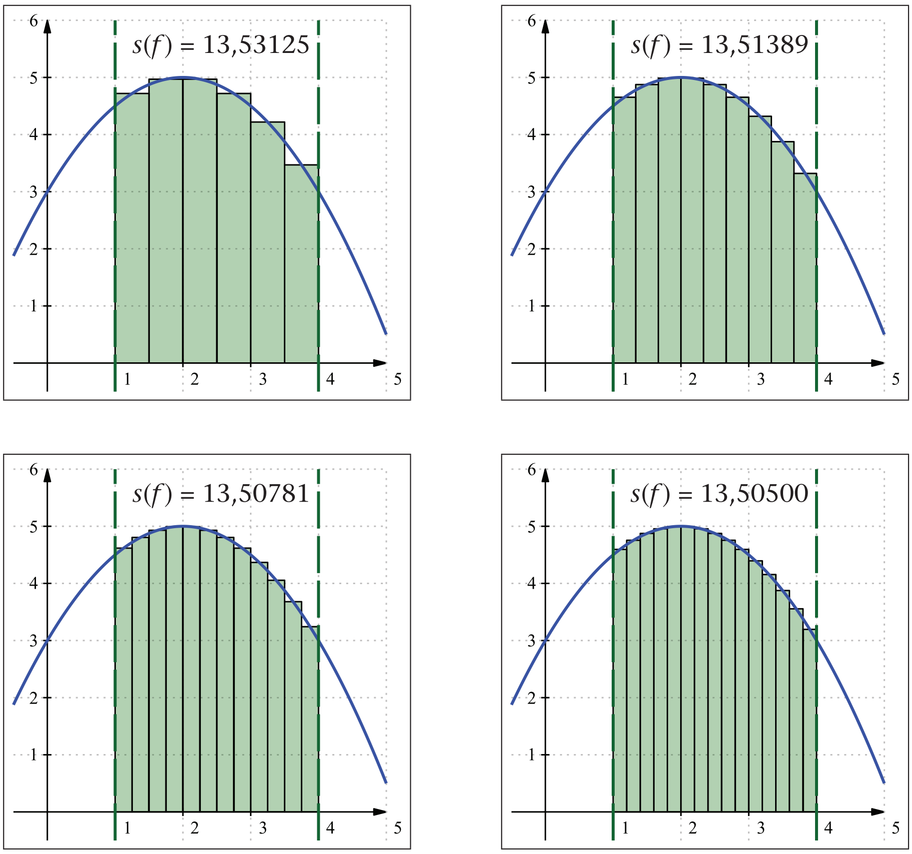


Figura 4

Càlcul de l'aproximació de l'àrea de la funció $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$ entre $a = 1$ i $b = 4$ quan es consideren 6,9,12 i 15 intervals d'igual longitud.

En la taula 1, podeu veure els valors de les aproximacions a mesura que es considereu més intervals. Com es pot veure, a mesura que s'augmenta el nombre de rectangles, els valors de les aproximacions de l'àrea tendeixen a un valor. Aquest serà el valor de l'àrea exacta: 13,5. És a dir, podríem dir que el límit de les aproximacions quan el nombre d'intervals tendeix a infinit és 13,5.

Taula 1. Valors de les aproximacions de l'àrea a mesura que s'agafen particions més fines

Nombre d'intervals	$s(f)$
3	13,62500000
6	13,53125000
9	13,51388889
12	13,50781250
15	13,50500000
18	13,50347222
21	13,50255102
24	13,50195312
27	13,50154321
30	13,50125000
33	13,50103306
36	13,50086806
39	13,50073964
42	13,50063776
45	13,50055556
600	13,50000312
1200	13,50000078
2400	13,50000020
4800	13,50000005
A = 13,5	

Quan això passa, és a dir, quan el límit de les aproximacions existeix, es diu que la funció és integrable en el sentit de Riemann. El valor del límit es denomina integral de Riemann de f en $[a,b]$ i es denota per

$$\int_2^4 f(x)dx = 13{,}5.$$

Existeixen funcions no integrables en el sentit de Riemann, és a dir, que a mesura que fem més rectangles, no tendim a un valor fix. Tot i això, aquest tipus de funcions queda fora del temari del curs.

Funcions no integrables

Un exemple de funció no integrable en el sentit de Riemann és l'anomenada funció de Dirichlet. Si hi esteu interessats, podeu consultar el web mathworld.wolfram.com/DirichletFunction.html.

1.1.3. Definició formal

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és una funció *positiva*, fitada i integrable en el sentit de Riemann, aleshores

$$\int_a^b f(x)dx = A,$$

en què A és l'àrea limitada per la gràfica de f, l'eix d'abscisses i les rectes verticals d'equacions $x = a$ i $x = b$.

Funció positiva

Diem que una funció $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és *positiva* si $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a,b]$.

Exemple 1

Considereu la funció $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ en l'interval [0,4]. Observeu que, en aquest cas, l'objectiu és calcular l'àrea d'un sector circular d'amplitud 90° o $\pi/2$ radiants d'una circumferència de radi 4. Aquesta regió està representada en la figura 5. Sabem, en aquest cas, per les propietats geomètriques de la figura, que $A = \pi r^2/4 = 4\pi \approx 12{,}56637$.

Figura 5. Àrea d'un quart de circumferència

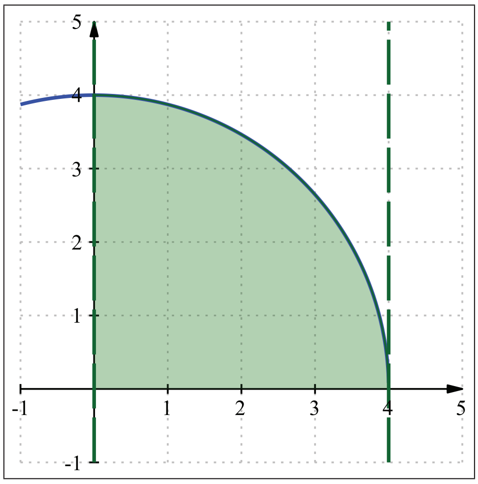


Figura 5

Àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x) = \sqrt{16-x^2}$, l'eix d'abscisses i les rectes verticals $x = 0$ i $x = 4$ (un quart de circumferència).

Comprovarem que, si considerem aproximacions de l'àrea utilitzant rectangles, convergim al valor esperat. En la figura 6 podeu trobar les aproximacions de les àrees per a 4, 8, 16 i 32 rectangles i podeu observar com les aproximacions tendeixen a 4π. De fet, per a 100 rectangles obtenim l'aproximació 12,56775, que té dos decimals correctes de l'àrea; per a 200 rectangles obtenim 12,56686, que té tres decimals correctes; i si considerem 1400 rectangles obtenim l'aproximació 12,56639, que ja té quatre decimals correctes.

Figura 6. Aproximació de l'àrea variant el nombre d'intervals

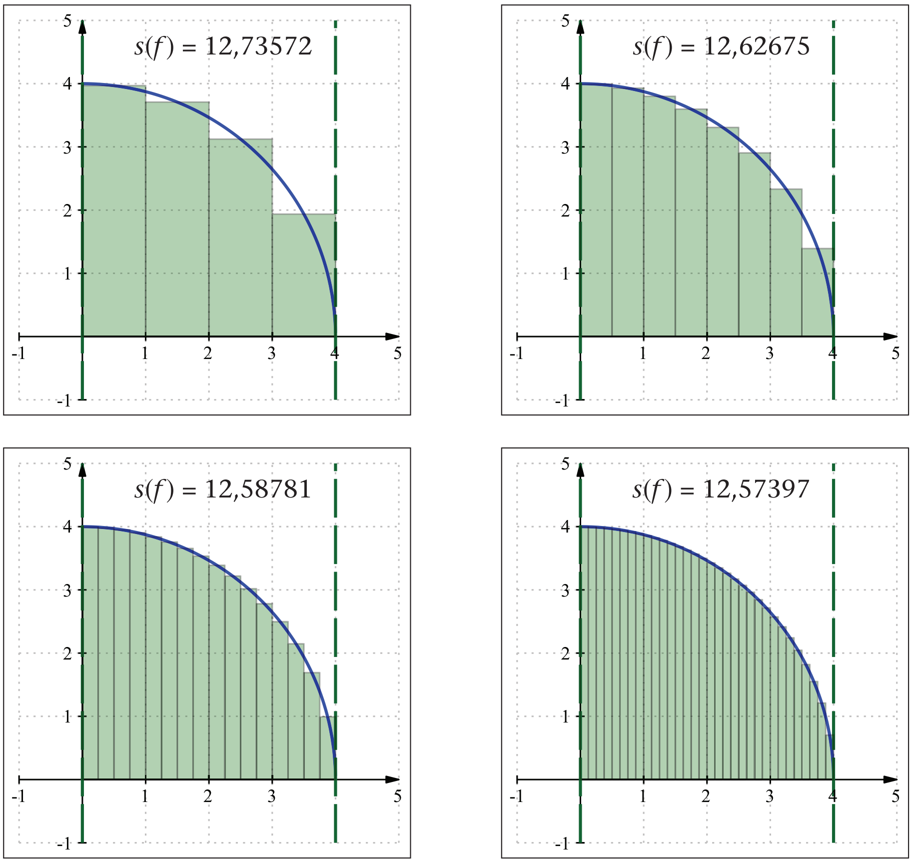


Figura 6

Càlcul de l'aproximació de l'àrea de la funció $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ entre $x = 0$ i $x = 4$ quan es consideren 4,8,16 i 32 intervals d'igual longitud.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és una funció *negativa*, fitada i integrable en el sentit de Riemann, aleshores

$$\int_a^b f(x)dx = -A,$$

en què A és l'àrea limitada per la gràfica de f, l'eix d'abscisses i les rectes verticals d'equacions $x = a$ i $x = b$.

Funció negativa

Diem que una funció $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és *negativa* si $f(x) < 0$ per a tot $x \in [a,b]$.

Exemple 2

Considereu ara la funció $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$ en l'interval [0,4]. Observeu que, en aquest cas, l'objectiu continua essent calcular l'àrea d'un sector circular d'amplitud 90° o $\pi/2$ radiants d'una circumferència de radi 4, com es veu en la figura 7. Per tant, també en aquest cas, aplicant les propietats de la geometria, sabem que $A = \pi r^2/4 = 4\pi \approx 12{,}56637$. En aquest cas, però, la funció pren valors negatius en l'interval [0,4] (vegeu la figura 7).

Figura 7. Àrea d'un quart de circumferència

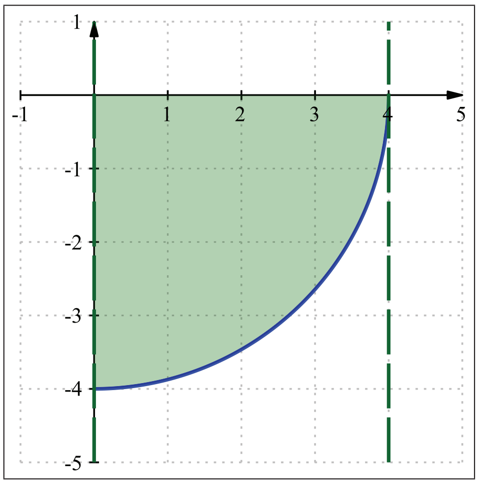


Figura 7

Àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$, l'eix d'abscisses i les rectes verticals $x = 0$ i $x = 4$.

Si considerem la mateixa distribució per rectangles que hem considerat en els exemples anteriors, les altures dels rectangles seràn negatives perquè la funció pren valors negatius. Per tant, el valor de l'aproximació serà un nombre negatiu.

En efecte, si seguim el mateix procediment que en els exemples anteriors, obtenim el resultat següent.

- Considerem tres punts equiespaiats entre $x = 0$ i $x = 4$, com ara $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ i $x_4 = 4$ com es veu en la figura 8.

Figura 8. Aproximació de l'àrea d'un quart de circumferència

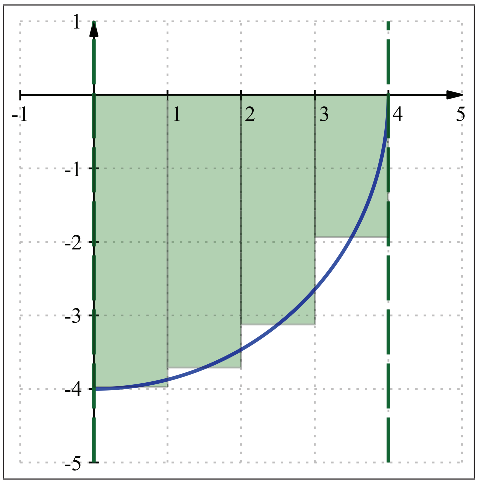


Figura 8

Càlcul de l'aproximació de l'àrea de la funció $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$ quan es consideren els punts $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ i $x_3 = 4$.

- Amb l'interval determinat pels primers dos punts, $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$, considerarem el punt mig $x_{01} = 0{,}5$ i construirem un rectangle d'altura $h_{01} = f(x_{01}) = -\sqrt{16-0{,}5^2} \approx -3{,}9686$. Fem el mateix amb la resta de subintervals per obtenir les diferents altures dels rectangles

$$h_{12} = f(x_{12}) = f(1{,}5) \approx -3{,}7081$$
$$h_{23} = f(x_{23}) = f(2{,}5) \approx -3{,}1225$$
$$h_{34} = f(x_{34}) = f(3{,}5) \approx -1{,}9365.$$

- Calculem el valor aproximat sumant l'àrea de cada rectangle, és a dir,

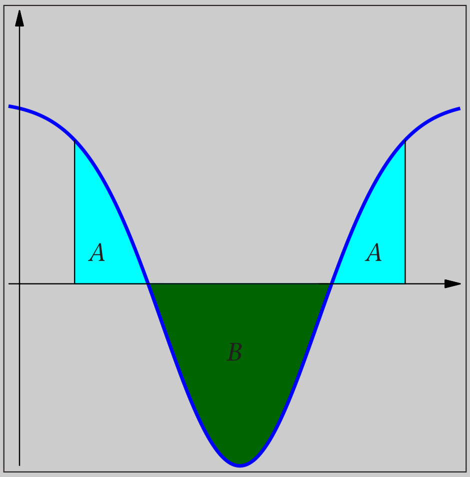
$$\begin{aligned} s(f) =& h_{01}(x_1 - x_0) + h_{12}(x_2 - x_1) + h_{23}(x_3 - x_2) + h_{34}(x_4 - x_3) \\ &\approx -3{,}9686 - 3{,}7081 - 3{,}1225 - 1{,}9365 = -12{,}7357. \end{aligned}$$

És important observar que, en el cas d'una funció negativa, la integral de Riemann (és a dir, el límit de les àrees dels rectangles quan fem el nombre d'intervals tendir a infinit) ens dóna el valor de l'àrea en negatiu. Per tant, per a calcular l'àrea, cal canviar el signe del resultat obtingut.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és una funció fitada i integrable en el sentit de Riemann, llavors

$$\int_a^b f(x)dx = A - B,$$

en què A és la suma de les àrees limitades per la funció f en els trossos en què és *positiva*, i B és la suma de les àrees limitades per la funció f en els trossos en què és *negativa*.



És important recordar, que tot i que la integral de Riemann està intrínsecament relacionada amb el càlcul d'àrees, quan tenim funcions en què es produeixen canvis de signe, la integral directament no ens dóna l'àrea que delimita la funció amb l'eix d'abscisses.

Això ho veurem amb més detall en els subapartats següents.

1.2. Teorema fonamental del càlcul

Com hem vist en el subapartat anterior, per a calcular el valor de la integral de Riemann d'una funció, cal considerar les aproximacions mitjançant l'àrea de rectangles i mirar si, augmentant el nombre d'intervals, convergim a un valor. Per tant, per a calcular el valor de la integral de Riemann, cal calcular el valor d'aquest límit. Aquest procés és lent i costós, sobretot si no es disposa d'un ordinador que faci els càlculs de manera ràpida i segura.

Afortunadament, el teorema fonamental del càlcul ens permet relacionar el càlcul de la integral de Riemann amb el càlcul de primitives, cosa que és de gran utilitat per al càlcul d'integrals definides.

Teorema fonamental del càlcul (primera part) o regla de Barrow

Si f és una funció contínua en $[a,b]$ i $F(x)$ és una primitiva de f, aleshores

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La notació usual per a la diferència $F(b) - F(a)$ és:

$$F(x)\Big|_a^b \qquad \text{o} \qquad [F(x)]_a^b.$$

Exemple 3

Mitjançant la definició de la integral de Riemann utilitzant rectangles, hem vist anteriorment que l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3$, l'eix d'abscisses i les rectes verticals $x = 1$ i $x = 4$ és 13,5.

A continuació comprovarem que obtenim el mateix resultat utilitzant la regla de Barrow, tenint en compte que una primitiva de $f(x)$ és $F(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2 + 3x$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x)dx &= \int_1^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + x^2 + 3x\right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{4^3}{6} + 4^2 + 3\cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{6} + 1^2 + 3\right) = \frac{27}{2} = 13{,}5\end{aligned}$$

Exemple 4

Mitjançant la definició de la integral de Riemann també hem comprovat que si considerem la funció $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ en l'interval [0,4] –que genera un sector circular d'amplitud de 90°–, aleshores la integral de Riemann coincideix amb l'àrea del sector i és $4\pi \approx 12{,}56637$.

Comprovem que, en aquest cas, obtenim el mateix resultat utilitzant la regla de Barrow (primera part del teorema fonamental del càlcul). Observem que, en aquest cas, el càlcul de la primitiva de la funció és una mica més complicat i cal utilitzar un canvi de variable juntament amb propietats trigonomètriques.

Comencem aplicant el canvi de variable $x = 4\sin(t)$ i aplicant la propietat que $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &= \int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx \\
&= \left[\begin{array}{l|l} x = 4\sin(t) & x = 0 \longrightarrow t = \arcsin(0/4) = \arcsin(0) = 0 \\ dx = 4\cos(t)dt & x = 4 \longrightarrow t = \arcsin(4/4) = \arcsin(1) = \pi/2 \end{array}\right] \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{16-16\sin^2(t)}4\cos(t)dt = 4\cdot 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt \\
&= 16\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)dt = 16\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt
\end{aligned}
$$

Fixeu-vos que, en aquest cas, en tenir una integral definida, no solament hem canviat x i dx en fer el canvi de variable, sinó que també hem fet el canvi en els límits de la integral. Un cop fet això, hem de reescriure el $\cos^2(t)$ utilitzant que $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1-\cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$. Per tant, $\cos^2(t) = \cos(2t)/2 + 1/2$. D'aquesta manera, tenim que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &= 16\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt = \frac{16}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos(2t)+1)\,dx = 8\left[\frac{\sin(2t)}{2}+t\right]_0^{\pi/2} \\
&= [4\sin(2t)+8t]_0^{\pi/2} = \left(4\sin(2\frac{\pi}{2})+8\frac{\pi}{2}\right) - (4\sin(0)+0) = \frac{8\pi}{2} = 4\pi
\end{aligned}
$$

Observeu que, un cop hem calculat la primitiva de la funció, només cal aplicar la Regla de Barrow avaluant la primitiva en $\pi/2$ (extrem dret de la integral) i restant-li l'avaluació de la primitiva en el 0 (extrem esquerre de la integral).

Exercici 1 *Calculeu les integrals següents de Riemann utilitzant la regla de Barrow:*

a) $\int_0^2 x^2 dx$

b) $\int_0^4 -e^x dx$

c) $\int_{-4}^4 (x^2-2)dx$

d) $\int_0^{3\pi/2} \sin(x)dx$

Digueu, en cada cas, quina relació hi ha entre la integral de Riemann i l'àrea que delimita la funció amb l'eix d'abscisses.

Per tant, la regla de Barrow o la primera part del teorema fonamental del càlcul ens permeten calcular integrals de Riemann en el cas que sapiguem calcular la primitiva de la funció. El teorema següent ens permet calcular la derivada d'una funció definida de manera integral.

Regla de Barrow

La regla de Barrow ens permet calcular integrals de Riemann sempre que siguem capaços de calcular una primitiva de la funció.

Teorema fonamental del càlcul (segona part)

Si f és contínua en $[a,b]$, i $g(x)$ i $h(x)$ són dues funcions derivables en (a,b), aleshores la funció

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b), i la seva derivada és

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Funció definida de manera integral

L'expressió $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ pot semblar estranya, però cal ser conscients que la variable de la funció F és x, mentre que la variable de la integral és t. Dit d'una altra manera, per cada valor de x, $F(x)$ és una integral de Riemann d'extrems variables.

Exemple 5

Considereu la funció

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t}dt$$

definida per les funcions $f(t) = e^{-t}$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = x^3$. Aleshores, utilitzant la segona part del teorema fonamental del càlcul, podem calcular la derivada de la funció $F(x)$ com

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-x^3}3x^2 - e^{-x^2}2x = 3x^2e^{-x^3} - 2xe^{-x^2}.$$

Observeu que, en aquest cas, com que és senzill calcular una primitiva de la funció $f(t)$, hauríem pogut calcular la derivada de $F(x)$ primer calculant $F(x)$ i després derivant. Comprovem que obtenim el mateix resultat

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{x^3} e^{-t}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\left[-e^{-t}\right]_{x^2}^{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(-e^{-x^3} + e^{-x^2}\right) = 3x^2e^{-x^3} - 2xe^{-x^2}.$$

Exemple 6

Considereu la funció

$$F(x) = \int_{3}^{x^2} e^{t^3}dt$$

definida per les funcions $f(t) = e^{t^3}$, $g(x) = 3$ i $h(x) = x^2$. Aleshores, utilitzant la segona part del teorema fonamental del càlcul, tenim que podem calcular la derivada de la funció $F(x)$ com

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - e^3 \cdot 0 = 2xe^{x^2}.$$

Sovint ens trobem que la funció $g(x)$ està determinada per una constant. Com que $g'(x) = 0$ tenim, tal com ho hem obtingut en l'equació anterior, que

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x).$$

Observem a més que, en aquest cas, no és gens senzill calcular una primitiva de la funció e^{t^3}. Per tant, per a calcular la derivada de $F(x)$ no podem primer calcular la primitiva i després derivar. Sense el teorema fonamental del càlcul no hauríem pogut calcular la derivada.

Exercici 2 *Calculeu les derivades de les funcions següents:*

a) $F(x) = \int_0^x t^2 dt$

b) $F(x) = \int_0^{e^{3x}} \sin(t) dt$

c) $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

1.3. Propietats de la integral de Riemann

A continuació es detallen unes quantes propietats de la integral de Riemann que poden ser d'interès.

Donades $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables en el sentit de Riemann en $[a,b]$ es verifiquen les propietats següents:

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b) $\int_a^a f(x)dx = 0$

c) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

d) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}$

e) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \forall c \in [a,b]$

2. Aplicacions de la integral de Riemann: càlcul d'àrees

2.1. Àrea delimitada per una funció i l'eix d'abscisses

Recordem que la integral de Riemann d'una funció f que té canvis de signe en un interval $[a,b]$ ens dóna la suma de les àrees limitades per la funció f quan és positiva, menys la suma de les àrees limitades per la funció f quan és negativa. Per tant, **la integral no ens dóna directament el valor de l'àrea**.

De fet, l'àrea delimitada per una funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = a$ i $x = b$ està determinada per:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx,$$

ja que el que fa el valor absolut és transformar en positius –canviar de signe– els trossos en què la funció és negativa. Un exemple d'això es pot veure en la figura 9.

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_2 - B, \qquad \int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2 + B$$

Figura 9. Àrea delimitada per la gràfica d'una funció i l'eix d'abscisses

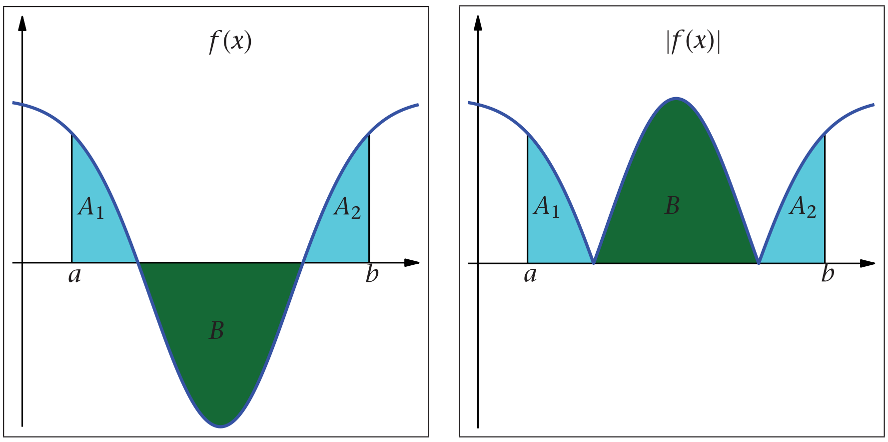


Figura 9

Regions que delimiten les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $|f(x)|$. Si es vol calcular l'àrea d'una funció $f(x)$ amb l'eix d'abscisses, cal considerar la funció $|f(x)|$.

Ara bé, com es calcula $\int_a^b |f(x)|dx$? Observeu que per a calcular el valor absolut, necessitem saber quan $f(x)$ és *positiva* i quan $f(x)$ és *negativa*. Per tant, per a calcular l'àrea és necessari:

1) calcular els punts d'intersecció de la funció $f(x)$ amb l'eix d'abscisses en l'interval $[a,b]$;

2) determinar els subintervals en què $f(x) \geq 0$ i els subintervals en què $f(x) \leq 0$;

3) l'àrea és la suma de la integral de f en què f és positiva i les integrals en què f és negativa canviades de signe.

Exemple 7

Volem calcular l'àrea de la funció $\sin(x)$ amb l'eix d'abscisses entre les rectes $x = 0$ i $x = 3\pi/2$. En aquest cas la funció $\sin(x)$ té un canvi de signe en aquest interval, per tant, primer cal que trobem els punts de tall amb l'eix.

$$f(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Per tant, la funció $f(x)$ s'anul·la en el punt $x = \pi \in [0,3\pi/2]$.

Un cop determinat el punt de tall, hem de determinar en quins intervals la funció és positiva i en quins intervals la funció és negativa. En aquest cas, $f(x) \geq 0$ en $[0,\pi]$ i $f(x) \leq 0$ en $[\pi,3\pi/2]$ com podeu veure en la figura 10.

Figura 10. Funció $f(x) = \sin(x)$ entre 0 i $3\pi/2$

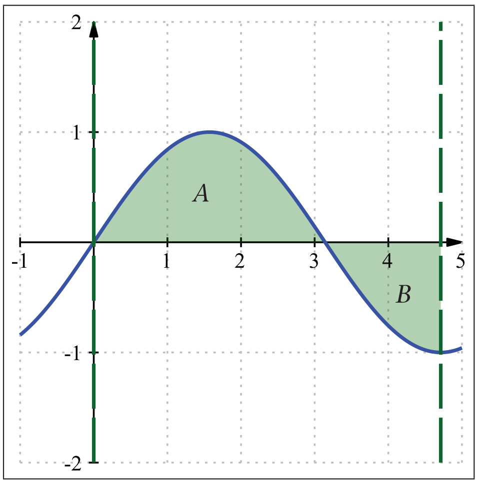


Figura 10

Regions que delimita la gràfica de la funció $f(x) = \sin(x)$ i les rectes $x = 0$ i $x = 3\pi/2$. És important notar que $f(x) < 0$ en interval obert: $(\pi,3\pi/2)$.

Per tant, l'àrea està determinada per

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} - [-\cos(x)]_{\pi}^{3\pi/2} \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(3\pi/2) - \cos(\pi) = 1 + 1 + 0 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Exemple 8

Volem calcular l'àrea de la funció $x^2 - 2$ amb l'eix d'abscisses entre les rectes $x = -4$ i $x = 4$. En aquest cas, la funció $x^2 - 2$ té dos canvis de signe en aquest interval, per tant, primer cal que trobem els punts de tall amb l'eix.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

Per tant, la funció $f(x)$ s'anul·la en els punts $x = \pm\sqrt{2} \in [-4,4]$.

Un cop determinats els punts de tall, hem de determinar en quins intervals la funció és positiva i en quins intervals la funció és negativa. En aquest cas, $f(x) \geq 0$ en $[-4, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},4]$ i $f(x) \leq 0$ en $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ com podeu veure en la figura 11.

Figura 11. Funció $f(x) = x^2 - 2$ entre -4 i 4

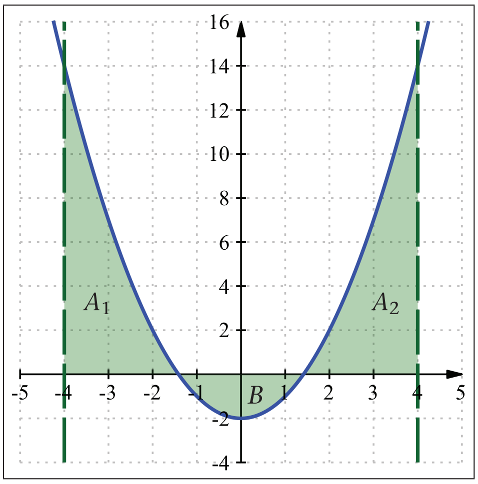


Figura 11

Regions que delimita la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 2$ i les rectes $x = -4$ i $x = 4$. És important notar que $f(x) < 0$ en $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Per tant, tenint en compte que la primitiva de $f(x)$ és $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$, que és una funció senar, és a dir $F(-x) = -F(x)$, l'àrea està determinada per

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{-\sqrt{2}} f(x)dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)dx + \int_{\sqrt{2}}^{4} f(x)dx \\
&= [F(x)]_{-4}^{-\sqrt{2}} - [F(x)]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + [F(x)]_{\sqrt{2}}^{4} \\
&= F(-\sqrt{2}) - F(-4) - F(\sqrt{2}) + F(-\sqrt{2}) + F(4) - F(\sqrt{2}) \\
&= -F(\sqrt{2}) + F(4) - F(\sqrt{2}) - F(\sqrt{2}) + F(4) - F(\sqrt{2}) = -4F(\sqrt{2}) + 2F(4) \\
&= -4\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2}\right) + 2\left(\frac{64}{3} - 8\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{3} + 8\sqrt{2} + \frac{128}{3} - 16 = \frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{80}{3} \\
&\approx 34{,}2091.
\end{aligned}
$$

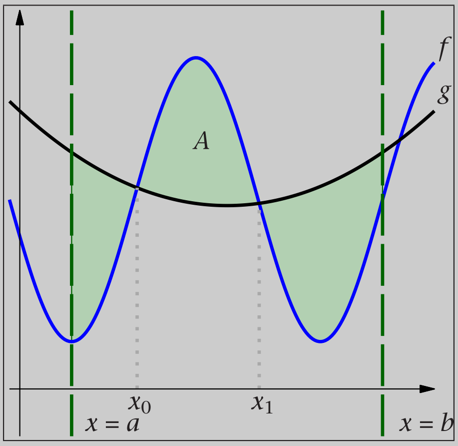
Exercici 3 *Determineu l'àrea que delimiten les funcions següents, l'eix d'abscisses i les rectes donades en cada cas:*

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $x = -2$ *i* $x = 6$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $x = -2$ *i* $x = 4$
c) $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$, $x = 0$ *i* $x = \ln(2)$

Ajuda: feu el canvi de variable en la integral $t^2 = e^x - 1$.

2.2. Àrea delimitada per dues funcions qualssevol

Siguin f i g dues funcions qualssevol fitades i integrables en el sentit de Riemann en l'interval $[a,b]$, com les que es mostren en la figura següent.



L'àrea delimitada entre les dues cobres i les rectes $x = a$ i $x = b$ està determinada per:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Ara bé, com es calcula $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$? Observeu que per a calcular el valor absolut, necessitem saber quan $f(x) - g(x) \geq 0$ i quan $f(x) - g(x) \leq 0$. Per tant, per a calcular l'àrea és necessari:

1) calcular els punts d'intersecció de les dues funcions en l'interval $[a,b]$;

2) determinar els subintervals en què $f(x) \geq g(x)$ i els subintervals en què $g(x) \geq f(x)$;

3) l'àrea és la suma de les integrals de $f - g$ quan f és més gran que g i les integrals de $g - f$ quan g és més gran que f.

En el cas de les funcions f i g de la figura anterior, l'àrea es calcularia com:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \\ &= \int_a^{x_0} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{x_1}^{b} (g(x) - f(x))\,dx \end{aligned}$$

Exemple 9

Volem calcular l'àrea de la regió tancada en forma de mitja lluna que delimita amb la recta $x = 0$, les funcions $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ i $g(x) = 3\sqrt{x}$.

La figura 12 mostra l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions f i g.

Figura 12. Àrea limitada per les gràfiques de les funcions $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ i $g(x) = 3\sqrt{x}$

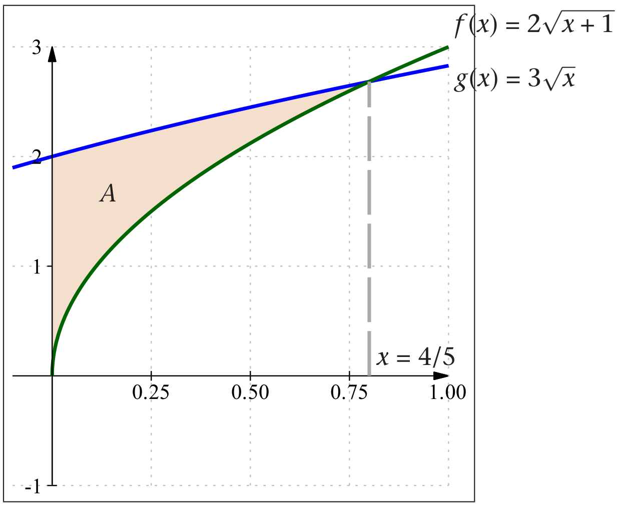


Figura 12

Regió que delimiten les gràfiques de les funcions $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ i $g(x) = 3\sqrt{x}$ i la recta $x = 0$. És important notar que $f(x) \geq g(x)$ en tot l'interval d'integració.

El primer que hem de fer és determinar el punt de tall entre les dues funcions, és a dir, el punt x tal que $f(x) = g(x)$:

$$2\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x} \iff 4(x+1) = 9x \iff 5x - 4 = 0 \iff x = \frac{4}{5}$$

Com que en l'interval $[0, \frac{4}{5}]$ tenim que $f(x) \geq g(x)$, l'àrea està determinada per:

$$A = \int_0^{\frac{4}{5}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\frac{4}{5}} \left(2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x}\right) dx$$

Per tant,

$$A = \int_0^{\frac{4}{5}} \left(2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{27}{5\sqrt{5}} - 2\frac{8}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{3} = \frac{20}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{3} = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{4}{3} \approx 0{,}4556$$

Exemple 10

En aquest exemple volem calcular l'àrea delimitada per les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = 1/2$ i les rectes $x = 0$ i $x = \pi$ (vegeu la figura 13).

Figura 13. Gràfica de les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = 1/2$ i les rectes $x = 0$ i $x = \pi$

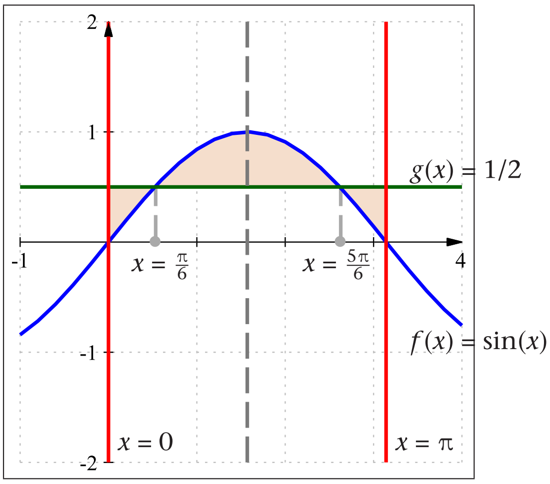


Figura 13

Regió que delimiten les gràfiques de les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = 1/2$ i les rectes $x = 0$ i $x = \pi$. És important notar dues coses: (1) la simetria de la funció respecte la recta $x = \pi/2$ i (2) que $g(x) \geq f(x)$ en $[0,\pi/6]$ i que $f(x) \geq g(x)$ en $[\pi/6,\pi/2]$.

En primer lloc, necessitem saber els punts en què la funció sinus talla la recta $g(x) = 1/2$. Per això necessitem igualar les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = \frac{1}{2}$:

$$\sin(x) = \frac{1}{2}, x \in [0,\pi] \Longleftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Per tant, els dos punts de tall que estem buscant són $x = \dfrac{\pi}{6}$ i $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Observem, però, que les funcions $f(x)$ i $g(x)$ són simètriques en l'interval $[0,\pi]$. Per tant, aprofitant la simetria de les funcions podem calcular l'àrea que delimiten en l'interval $[0,\pi]$ com a dues vegades l'àrea que delimiten en l'interval $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Per a calcular l'àrea, utilitzem les observacions següents:

- en l'interval $[0,\dfrac{\pi}{6}]$, la funció $g(x)$ és més gran o igual que $f(x)$,
- en l'interval $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$, la funció $f(x)$ és més gran o igual que $g(x)$

Per tant, l'àrea delimitada per les dues corbes en l'interval $[0,\pi]$ és

$$\begin{aligned}
A &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} (g(x) - f(x))dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))dx\right) \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \sin(x)\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right) dx\right) \\
&= 2\left[\frac{1}{2}x + \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + 2\left[-\cos(x) - \frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(0)\right) + 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + 2\left(0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \\
&= 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 2 \simeq 0{,}9405.
\end{aligned}$$

Exercici 4 *Determineu l'àrea que delimiten les funcions següents:*

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ *i* $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ *i les rectes* $x = 1$ *i* $x = 2$
b) $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ *i* $h(x) = 10 + x$

Solucions als exercicis

1. a) 8/3, la integral coincideix amb l'àrea entre la funció i l'eix OX entre $x = 0$ i $x = 2$

b) $1 - e^4$, la integral coincideix amb l'àrea entre la funció i l'eix OX entre $x = 0$ i $x = 4$ canviada de signe

c) 80/3, la integral de Riemann coincideix amb la sumes de les àrees en què la funció és positiva $[-4, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 4]$ menys l'àrea en què la funció és negativa $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

d) 1, la integral de Riemann coincideix amb la suma de l'àrea en què la funció és positiva $[0, \pi]$ menys l'àrea en què la funció és negativa $[\pi, 3\pi/2]$

2. a) $F'(x) = x^2$, b) $F'(x) = 3e^{3x}\sin(e^{3x})$, c) $F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

3. a) $A = 40$, b) $A = \dfrac{41}{2}$, c) $A = 2 - \dfrac{\pi}{2}$

4. a) $A = \ln\left(\frac{8}{5}\right)$, b) 215/6

Resolució detallada dels exercicis

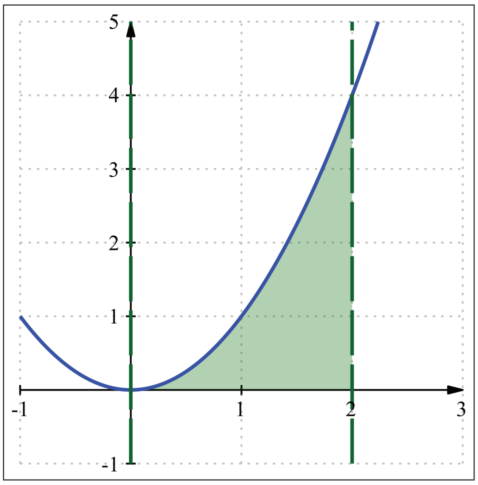
1)

a) Recordem que per a calcular una integral definida, la regla de Barrow ens diu que és suficient calcular una primitiva de la funció i avaluar-la en els dos extrems.

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

En aquest cas, com es pot veure en la figura 14, la funció $f(x)$ és positiva en [0,2]. Per tant, la integral de Riemann coincideix amb l'àrea que limita la funció amb l'eix d'abscisses, $A = 8/3$.

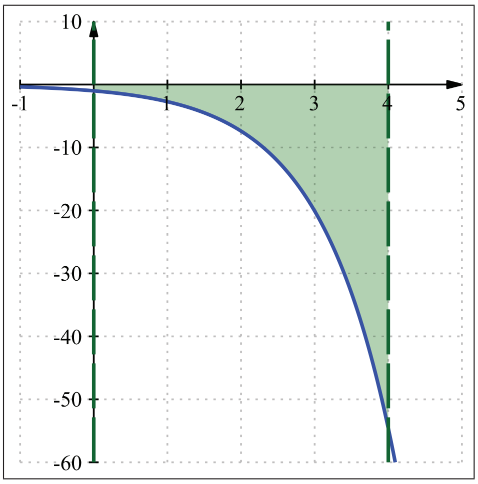
Figura 14. Funció $f(x) = x^2$ entre 0 i 2



b) $\int_0^4 -e^x dx = \left[-e^x\right]_0^4 = -e^4 + e^0 = 1 - e^4 \approx -53{,}59815.$

En aquest cas, com es pot veure en la figura 15, la funció $f(x)$ és negativa en [0,4]. Per tant, la integral de Riemann coincideix amb l'àrea que limita la funció amb l'eix d'abscisses canviada de signe, és a dir, $A = 53{,}598$.

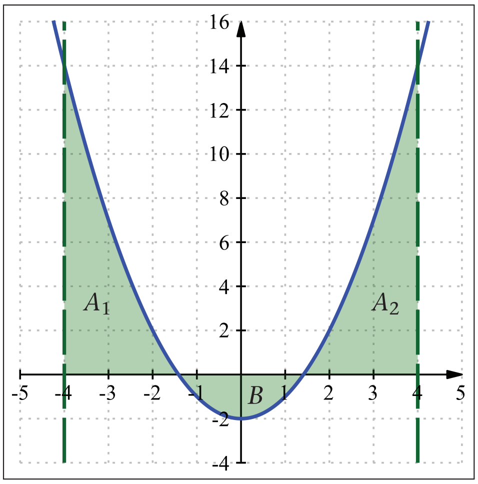
Figura 15. Funció $f(x) = -e^x$ entre 0 i 4



c) $\int_{-4}^{4}(x^2-2)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_{-4}^{4} = \left(\frac{4^3}{3}-8\right)-\left(\frac{-4^3}{3}+8\right) = \frac{128}{3}-16 = \frac{80}{3}.$

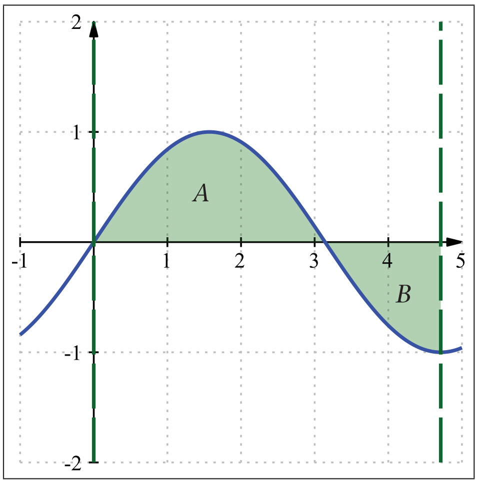
En aquest cas, com es pot veure en la figura 16, la funció $f(x)$ té dos canvis de signe en l'interval $[-4,4]$. Per tant, la integral de Riemann coincideix amb les sumes de les àrees en què la funció és positiva $[-4,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},4]$ menys l'àrea en què la funció és negativa $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. És a dir $A_1+A_2-B=80/3$.

Figura 16. Funció $f(x)=x^2-2$ entre -4 i 4



d) $\int_{0}^{3\pi/2}\sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{3\pi/2} = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(0) = 1.$
En aquest cas, com es pot veure en la figura 17, la funció $f(x)$ té un canvi de signe en l'interval $[0,3\pi/2]$. Per tant, la integral de Riemann coincideix amb la suma de l'àrea en què la funció és positiva $[0,\pi]$ menys l'àrea en què la funció és negativa $[\pi,3\pi/2]$. És a dir $A-B=1$.

Figura 17. Funció $f(x)=\sin(x)$ entre 0 i $3\pi/2$



2)

a) En aquest cas, la funció $F(x)$ està definida per les funcions $f(t)=t^2$, $g(x)=0$ i $h(x)=x$, és a dir

$$F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt.$$

Per tant, tenint en compte que $g'(x) = 0$ i $h'(x) = 1$ i que $f(g(x)) = f(0) = 0^2 = 0$ i $f(h(x)) = f(x) = x^2$ aplicant el teorema fonamental del càlcul tenim que

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) = x^2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = x^2.$$

b) En aquest cas, la funció $F(x)$ està definida per les funcions $f(t) = \sin(t)$, $g(x) = 0$ i $h(x) = e^{3x}$. Per tant, tenint en compte que $g'(x) = 0$ i $h'(x) = 3e^{3x}$ i que $f(g(x)) = f(0) = 0$ i $f(h(x)) = f(e^{3x}) = \sin(e^{3x})$, aplicant el teorema fonamental del càlcul tenim que

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) = \sin(e^{3x}) \cdot 3e^{3x} - 0 \cdot 0 = 3e^{3x}\sin(e^{3x}).$$

c) En aquest cas, la funció $F(x)$ està definida per les funcions $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $g(x) = x$ i $h(x) = 1$. Per tant, tenint en compte que $g'(x) = 1$ i $h'(x) = 0$ i que $f(g(x)) = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ i $f(h(x)) = f(1) = \dfrac{1}{2}$, aplicant el teorema fonamental del càlcul tenim que

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{1+x^2} \cdot 1 = -\frac{1}{1+x^2}.$$

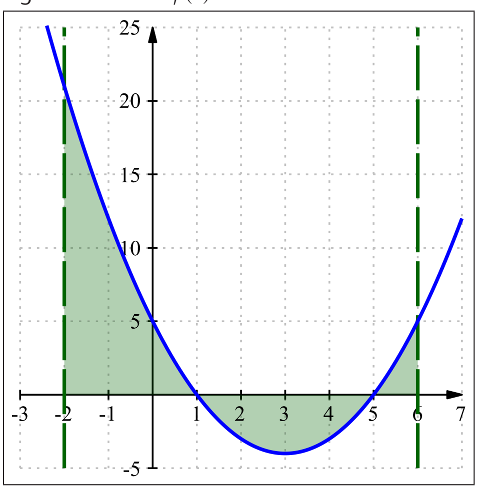
3)

a) Volem calcular l'àrea de la funció $x^2 - 6x + 5$ amb l'eix d'abscisses entre les rectes $x = -2$ i $x = 6$. En aquest cas, la funció $x^2 - 6x + 5$ té dos canvis de signe en aquest interval, per tant, primer cal que trobem els punts de tall amb l'eix.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 6x + 5 = 0 \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \iff x = 1{,}5.$$

Per tant, la funció $f(x)$ s'anul·la en els punts $x = 1{,}5 \in [-2{,}6]$.
Un cop determinats els punts de tall, hem de determinar en quins intervals la funció és positiva i en quins intervals la funció és negativa. Com que la funció és contínua, ho podem fer simplement avaluant-la en punts intermedis. Per exemple $f(-2) = 21$, $f(3) = -4$ i $f(6) = 5$. Per tant, en aquest cas, $f(x) \geq 0$ en $[-2{,}1] \cup [5{,}6]$ i $f(x) \leq 0$ en $[1{,}5]$ com podeu veure en la figura 18.

Figura 18. Funció $f(x) = x^2 - 6x + 5$ entre -2 i 6



Per tant, tenint en compte que la primitiva de $f(x)$ és $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$, l'àrea està determinada per

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{6} f(x)dx \\ &= [F(x)]_{-2}^{1} - [F(x)]_{1}^{5} + [F(x)]_{5}^{6} \\ &= F(1) - F(-2) - F(5) + F(1) + F(6) - F(5) \\ &= -F(-2) + 2F(1) - 2F(5) + F(6) = \frac{74}{3} + \frac{14}{3} + \frac{50}{3} - 6 = 40. \end{aligned}$$

Observeu que també hauríem pogut obtenir l'àrea total sumant les tres àrees que la determinen

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{1} f(x)dx = [F(x)]_{-2}^{1} = F(1) - F(-2) = 27 \\ A_2 &= -\int_{1}^{5} f(x)dx = -[F(x)]_{1}^{5} = -F(5) + F(1) = \frac{32}{3} \\ A_3 &= \int_{5}^{6} f(x)dx = [F(x)]_{5}^{6} = F(6) - F(5) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

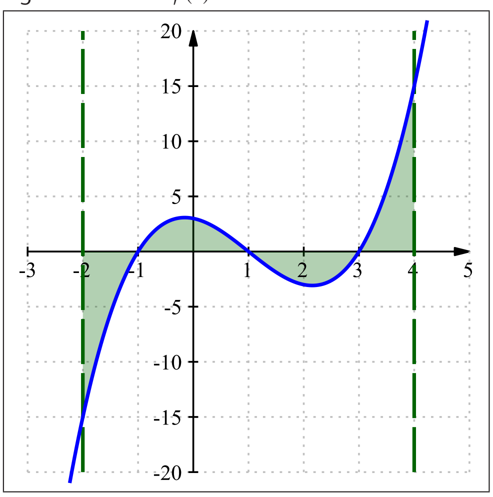
de manera que $A = A_1 + A_2 + A_3 = 40$.

b) Volem calcular l'àrea de la funció $x^3 - 3x^2 - x + 3$ amb l'eix d'abscisses entre les rectes $x = -2$ i $x = 4$. En aquest cas, la funció $x^3 - 3x^2 - x + 3$ té tres canvis de signe en aquest interval, per tant, primer cal que trobem els punts de tall amb l'eix.

$$f(x) = 0 \iff x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$$

Com que tenim un polinomi de grau 3, haurem d'utilitzar Ruffini per a intentar trobar primer una arrel entera. Observem que $f(1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$, per tant, $x = 1$ és una arrel i podem utilitzar Ruffini amb aquest valor.
Per tant, $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 3) = (x-1)(x+1)(x-3)$, ja que utilitzant la fórmula per a trobar els zeros d'una equació de segon grau tenim que $x^2 - 2x - 3$ s'anul·la en $x = -1$ i $x = 3$.
Per tant, la funció $f(x)$ s'anul·la en els punts $x = -1,1,3 \in [-2,4]$.
Un cop determinats els punts de tall, hem de determinar en quins intervals la funció és positiva i en quins intervals la funció és negativa. Com que la funció és contínua, ho podem fer simplement avaluant-la en punts intermedis. Per exemple $f(-2) = -15$, $f(0) = 3$, $f(2) = -3$ i $f(4) = 15$. Per tant, en aquest cas, $f(x) \geq 0$ en $[-1,1] \cup [3,4]$ i $f(x) \leq 0$ en $[-2,-1] \cup [1,3]$ com podeu veure en la figura 18.

Figura 19. Funció $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ entre –2 i 4



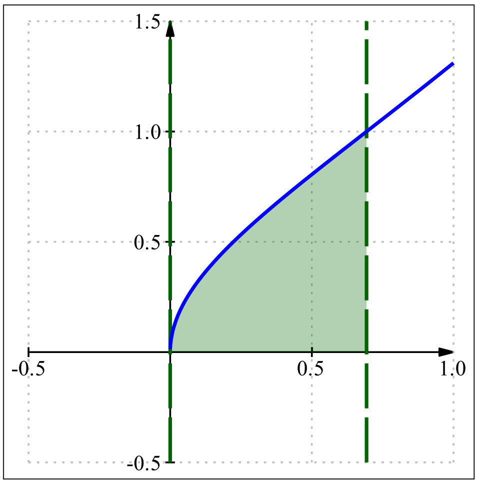
Per tant, tenint en compte que la primitiva de $f(x)$ és $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$, l'àrea està determinada per

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx \\ &= -[F(x)]_{-2}^{-1} + [F(x)]_{-1}^{1} - [F(x)]_{1}^{3} + [F(x)]_{3}^{4} \\ &= -F(-1) + F(-2) + F(1) - F(-1) - F(3) + F(1) + F(4) - F(3) \\ &= F(-2) - 2F(-1) + 2F(1) - 2F(-3) + F(4) = 4 + \frac{9}{2} + \frac{7}{2} + \frac{9}{2} + 4 = \frac{41}{2}. \end{aligned}$$

c) Volem calcular l'àrea de la funció $\sqrt{e^x - 1}$ amb l'eix d'abscisses entre les rectes $x = 0$ i $x = \ln(2)$. En aquest cas, la funció arrel quadrada és sempre positiva en el seu domini de definició. Comprovem primer que l'interval $[0, \ln(2)]$ està contingut dins el domini de definició de la funció

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}, e^x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, x \geq \ln(1) = 0\} = [0, +\infty).$$

Figura 20. Funció $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ entre 0 i ln(2)



Per tant, com que $[0, \ln(2)] \subset \mathrm{Dom}(f)$ i la funció en aquest interval és sempre positiva (com es pot veure en la figura 20) tenim que

$$A = \int_{0}^{\ln(2)} f(x)dx.$$

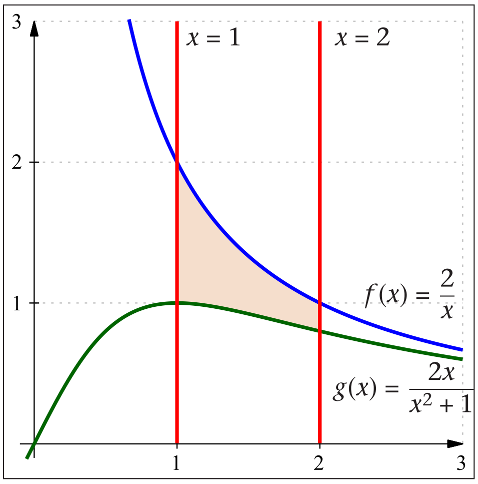
En aquest cas, per a calcular la integral hem de fer un canvi de variable, $t^2 = e^x - 1$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{0}^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}dx \\ &= \left[\begin{array}{l|l} t^2 = e^x - 1 & x = 0 \longrightarrow t = \sqrt{e^0 - 1} = 0 \\ 2tdt = e^x dx \Longrightarrow dx = \frac{2t}{e^x}dt = \frac{2t}{t^2+1}dt & x = \ln(2) \longrightarrow t = \sqrt{e^{\ln(2)} - 1} = \sqrt{1} = 1 \end{array} \right] \\ &= \int_{0}^{1} \sqrt{t^2}\frac{2t}{t^2+1}dt = \int_{0}^{1} \frac{2t^2}{t^2+1}dt = \int_{0}^{1} \frac{2(t^2+1)-2}{t^2+1}dt = \int_{0}^{1} \left[2 - \frac{-2}{t^2+1}\right] dt = [2t - 2\arctan(t)]_{0}^{1} \\ &= 2 - 2\arctan(1) + 2\arctan(0) = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4)

a) Se'ns demana que calculem l'àrea de la regió limitada per les gràfiques de les funcions $f(x)$, $g(x)$ i les rectes $x = 1$ i $x = 2$. En la figura 21 hem representat les funcions que hem donat en l'enunciat.

Figura 21. Gràfica de les funcions $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ i les rectes $x = 1$ i $x = 2$



Per a calcular l'àrea, el primer que hem de fer és calcular els punts de tall entre $f(x)$ i $g(x)$:

$$f(x) = g(x) \iff \frac{2}{x} = \frac{2x}{x^2+1} \iff 2x^2 + 2 = 2x^2 \iff 2 = 0$$

Veiem doncs que les dues funcions no tenen cap punt de tall, és a dir, que podrem expressar l'àrea com una única integral. Per a fer-ho, hem de determinar quina de les dues funcions és més gran en l'interval [1,2] simplement avaluant-les en un punt. En aquest cas tenim que

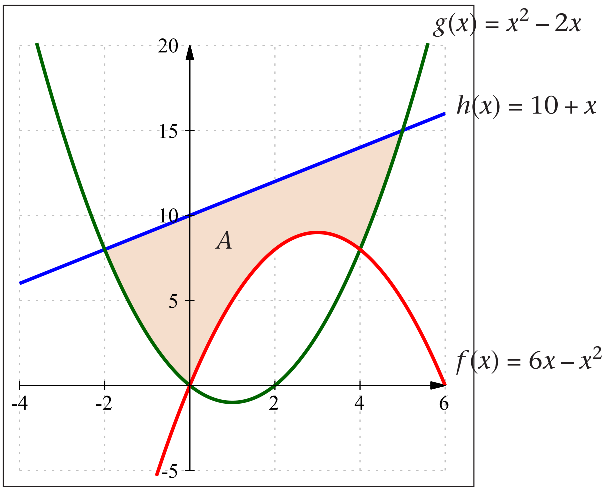
$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ g(1) = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \qquad f(1) > g(1) \Rightarrow f(x) > g(x)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (f(x) - g(x))dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = \int_1^2 \frac{2}{x}dx - \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \Big[2\ln(x)\Big]_1^2 - \Big[\ln(x^2+1)\Big]_1^2 = 2\ln(2) - 2\ln(1) - \ln(5) + \ln(2) \\ &= 3\ln(2) - \ln(5) = \ln(2^3) - \ln(5) = \ln\left(\frac{8}{5}\right). \end{aligned}$$

b) En aquest cas hem de calcular l'àrea delimitada per les tres corbes $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ i $h(x) = 10 + x$. La figura 22 mostra l'àrea delimitada per les gràfiques de les funcions f, g i h.

Figura 22. Àrea limitada per les funcions
$f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ i $h(x) = 10 + x$



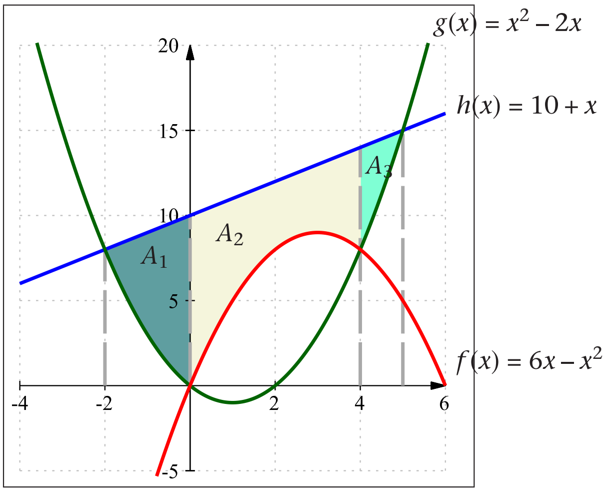
Si calculem els talls de les tres funcions tenim que

$$f(x) = g(x) \implies x = 0,\ 4$$

$$g(x) = h(x) \implies x = -2,\ 5$$

Observem que per a calcular l'àrea, hem de dividir l'àrea total en tres regions $x \in [-2,0]$, $x \in [0,4]$ i $x \in [4,5]$, tal com es veu en la figura 23.

Figura 23. Divisió en tres regions de l'àrea
limitada per f, g i h



Per tant:

$$A = \underbrace{\int_{-2}^{0} (h(x) - g(x))dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{0}^{4} (h(x) - f(x))dx}_{A_2} + \underbrace{\int_{4}^{5} (h(x) - g(x))dx}_{A_3}$$

$$= 34/3 + 64/3 + 19/6 = 215/6.$$

Bibliografia

Aguiló, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1994). *Temes clau de càlcul*. Edicions de la UPC. Servei de publicacions. Barcelona, Espanya

Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias*. Pearson. Madrid, Espanya.

Perelló, C. (1994). *Càlcul Infinitesimal. Amb mètodes numèrics i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana. Barcelona, Espanya

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2013). *Matemáticas para la ingeniería*. Pearson. Madrid, Espanya.