Integració

Càlcul de primitives

Mei Calm
Ramon Masià
Joan Carles Naranjo
Núria Parés
Francesc Pozo
Jordi Ripoll
Teresa Sancho

PID_00212663
Mòdul 2.1

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Aquest mòdul tractarà sobre el càlcul de primitives, que es pot considerar com la operació inversa a la derivació. Gràcies a la derivació, podem calcular la velocitat $v(t)$ d'una partícula sabent quin n'és el desplaçament $x(t)$. Això és possible, ja que $v(t) = \frac{d}{dt}x = x'(t)$. El procediment invers pot tenir interès, per exemple, si coneixem la velocitat $v(t)$ d'una partícula i en volem calcular el desplaçament $x(t)$. Aquest procediment invers és el que ens permetrà fer aquest tipus de càlculs. De manera més precisa, es presentarà el concepte de primitiva d'una funció, o integral indefinida. Seguidament, es presentaran els mètodes principals per a calcular primitives: primitives immediates, quasiimmediates, mètode d'integració per parts, mètode del canvi de variable i, finalment, la integració de funcions racionals.

1. Primitives i integral

El càlcul de primitives s'ha de considerar com l'operació inversa a la derivació. Per exemple, si considerem la funció $f(x) = x^2$, la seva derivada és $f'(x) = 2x$. Això ho podem representar d'aquesta manera:

$$f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Bàsicament, el que estem fent és *transformar* la funció $f(x) = x^2$ en la funció $f'(x) = 2x$, en què $f'(x)$ rep el nom de la *funció derivada*.

Ara bé, si ho mirem justament en el sentit contrari, és a dir, si ara la nostra funció d'origen és la funció $g(x) = 2x$, la funció $G(x) = x^2$ rep el nom de *primitiva* de la funció $g(x)$. Ho podem representar de la manera següent:

$$g(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad G(x) = x^2$$

1.1. Primitives d'una funció

Més formalment, donada una funció $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, una **primitiva** és qualsevol funció $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que la seva derivada sigui igual a $f(x)$, és a dir,

$$F'(x) = f(x).$$

Per a denotar que $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, la notació més habitual és

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Seguint amb l'exemple anterior, no solament la funció $f(x) = x^2$ té derivada $2x$. Fixeu-vos que si considerem les funcions següents i les seves derivades,

$$f_2(x) = x^2 + 2, \quad f_2'(x) = 2x,$$

$$f_3(x) = x^2 + 3, \quad f_3'(x) = 2x,$$

$$f_C(x) = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}, \quad f_C'(x) = 2x,$$

tant la funció x^2, com $x^2 + 3$ o com $x^2 + C$ són primitives de la funció x^2.

Tota funció té infinites primitives que difereixen només per una constant. Dit d'una altra manera, si F_1 i F_2 són dues primitives qualssevol de la funció $f(x)$, aleshores existeix una constant C tal que

$$F_1 - F_2 = C.$$

A vegades, no és tan fàcil detectar que dues funcions són primitives de la mateixa funció.

Exemple 1

Les funcions $F_1(x) = \tan^2(x)$ i $F_2(x) = \sec^2(x)$ són primitives de la funció $f(x) = \dfrac{2\tan(x)}{\cos^2(x)}$. En efecte, tot i que no ho sembli,

$$F_1(x) - F_2(x) = \tan^2(x) - \sec^2(x) = -1,$$

ja que

$$F_1(x) - F_2(x) = \tan^2(x) - \sec^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\sin^2(x) - 1}{\cos^2(x)} = \frac{-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = -1,$$

en què en la penúltima igualtat hem utilitzat la propietat ben coneguda que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ que ens permet substituir $\sin^2(x) - 1$ per $-\cos^2(x)$.

1.2. Integral indefinida d'una funció

Com hem vist abans, donada una funció $f(x)$, existeixen infinites primitives que difereixen només per constants.

D'aquesta manera, denominarem **integral indefinida** de $f(x)$ el conjunt de totes les seves primitives. La integral indefinida de $f(x)$ es denota per

$$\int f(x)dx$$

i es llegeix "la integral indefinida de la funció $f(x)$ respecte de la variable x".

Tot i que la notació d'una primitiva o de la integral indefinida és la mateixa, es distingeixen en funció de si el resultat és una única funció o un conjunt de funcions. Per exemple,

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + 2$$

és una primitiva de $\cos(x)$, mentre que

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C, \ C \in \mathbb{R}$$

és la integral indefinida de la funció $\cos(x)$.

La integral indefinida té la propietat de **linealitat**:

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

  És a dir, la integral indefinida de la suma de dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ és la suma de les integrals indefinides de $f(x)$ i $g(x)$ per separat.

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \ k \in \mathbb{R}$

  És a dir, la integral indefinida d'una funció que està multiplicada per una constant és igual a la constant per la integral indefinida de la funció.

Exemple 2

Ja hem vist que

$$\int 2xdx = x^2 + C, \ C \in \mathbb{R},$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C, \ C \in \mathbb{R},$$

Aleshores, utilitzant la propietat de linealitat, tenim que

$$\int (2x + \cos(x))dx = \int 2xdx + \int \cos(x)dx = x^2 + \sin(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

i

$$\int 8\cos(x)dx = 8\int \cos(x)dx = 8\sin(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. Càlcul de primitives

Com hem dit, el càlcul de primitives és el procediment invers de la derivació. Algunes d'aquestes primitives es podran calcular molt fàcilment: són les anomenades primitives immediates o quasiimmediates. En altres casos, serà necessari utilitzar mètodes més elaborats, com ara la integració per parts, el canvi de variable o la descomposició en fraccions simples.

2.1. Primitives immediates

Les primitives immediates són les que es poden calcular directament si llegim a la inversa una taula de derivades. És a dir, quan la funció que hem d'integrar és directament la derivada d'una funció elemental. Com diem, en aquest cas, el càlcul de la primitiva és immediat mirant una taula d'integrals com la taula 1.

Taula 1. Primitives d'algunes funcions elementals

Funcions simples	Funcions compostes
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq 1$	$\int u' u^n dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C,\ n \neq 1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int u' e^u dx = e^u + C$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	$\int u' \cos(u) dx = \sin(u) + C$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	$\int u' \sin(u) dx = -\cos(u) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2(u)} dx = \tan(u) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$	$\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arccos(u) + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C,\ a > 0, a \neq 1$	$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C,\ a > 0, a \neq 1$

Exemple 3

Per calcular una primitiva de la funció x^2, la taula 1 ens dóna directament la resposta:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

A més, és fàcil comprovar que el resultat és correcte, ja que

$$\left[\frac{x^3}{3} + C\right]' = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

Recordeu!

Per a comprovar si hem calculat bé la primitiva, només cal derivar el resultat i verificar que obtenim la funció inicial.

És important saber que a vegades cal multiplicar o dividir per alguna constant per a poder utilitzar la informació de la taula.

Exemple 4

Per a calcular una primitiva de la funció e^{5x}, hem d'utilitzar l'entrada de la taula 1 que ens dóna la primitiva de la funció exponencial per a funcions compostes. En aquest cas tenim

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Fixeu-vos que en aquest cas $u = 5x$, per tant per a poder aplicar la taula hem d'introduir la derivada $u' = 5$ dins la integral, i dividir per un cinquè per a no modificar el resultat.

A més, és fàcil comprovar que el resultat és correcte, ja que

$$\left[\frac{1}{5}e^{5x} + C\right]' = \frac{1}{5}5e^{5x} = e^{5x}.$$

Exercici 1 *Calculeu una primitiva de les funcions*

a) e^{3x}

b) $\frac{1}{2x}$

c) $\cos(5x)$

d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2.2. Primitives quasiimmediates

Les primitives quasiimmediates són les que es poden calcular directament fent servir la regla de la cadena i la taula 1. Hem volgut representar aquestes integrals també en la taula 1, però en una segona columna. D'aquesta manera, pot observar-se l'analogia amb les integrals immediates.

Si $F(x)$ és una primitiva de la funció $f(x)$, és a dir,

$$\int f(x)dx = F(x),$$

i considerem una altra funció $g(x)$, aleshores,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)).$$

Aquestes primitives reben el nom de **quasiimmediates**.

Del que es tracta, doncs, en aquest tipus d'integrals, és d'identificar quina funció fa el paper de la $f(x)$ i quina el paper de la $g(x)$. Al principi, això pot costar una mica, però més endavant semblarà més natural.

Exemple 5

Si volem calcular la primitiva de la funció

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

no veiem en la taula 1 cap esquema similar. No obstant això, sí que podem identificar els elements següents: una funció sinus ubicada en el denominador, i la derivada de la funció sinus al numerador. És a dir, si considerem les funcions $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \sin(x)$, en què $g'(x) = \cos(x)$, tenim que

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)}\cos(x) = f(g(x))g'(x).$$

Per tant, per a calcular la primitiva només cal calcular la primitiva de $f(x)$ i avaluar-la en $g(x)$. Donat que la primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ és $F(x) = \ln|x| + C$, tenim finalment que

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) = \ln|\sin(x)| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

A més, és fàcil comprovar que el resultat és correcte, ja que

$$[\ln|\sin(x)| + C]' = \frac{1}{\sin(x)}\cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Quasiimmediates o canvi de variable?

Veureu al subapartat 2.4 que les integrals quasiimmediates es poden considerar com un cas particular de la integració per canvi de variable. És per això que en alguns llibres no les consideren o, fins i tot, en anglès no hi ha cap paraula per a referir-s'hi.

Regla de la cadena

Recordeu que la derivada de la composició de dues funcions és $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Ho necessitareu per a comprovar les integrals quasiimmediates.

Exercici 2 *Calculeu les primitives següents:*

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}dx$

b) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

2.3. Mètode d'integració per parts

El mètode d'integració per parts és un mètode molt potent que permet, en general, calcular la integral del producte de dues funcions. El mètode es basa a reexpressar la integral inicial en una de més senzilla que la inicial.

El mètode d'integració per parts prové de calcular la derivada del producte de dues funcions. En efecte, si considerem les funcions $u(x)$ i $v(x)$,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Si ara aïllem el terme de la dreta del tot i apliquem la integral a cada terme, obtenim:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int [u(x)v(x)]'\,dx - \int v(x)u'(x)dx$$

$$= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

És a dir, si la integral de l'esquerra no és *fàcil* de calcular, es pot mirar de reexpressar amb l'objectiu que la integral de la dreta sigui més senzilla.

Si $u(x)$ i $v(x)$ són dues funcions derivables, aleshores

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

que també podem representar com

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

on $dv = v'(x)dx$ i $du = u'(x)dx$.

Exemple 6

Per exemple, per calcular la integral indefinida de $f(x) = xe^x$, aplicarem el mètode d'integració per parts. Considerarem les parts següents: $u = x$ i $dv = e^x dx$.

Un cop idendificats u i dv, hem de calcular du i v. Això es fa derivant l'expressió d'u i integrant l'expressió dv com es veu a continuació:

$$u = x \quad \overset{\text{derivem}}{\Longrightarrow} \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx \quad \overset{\text{integrem}}{\Longrightarrow} \quad v = e^x$$

Aleshores,

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Si per calcular la mateixa integral, escollim les parts de forma contrària, és a dir,

$$u = e^x \quad \overset{\text{derivem}}{\Longrightarrow} \quad du = e^x dx$$

$$dv = xdx \quad \overset{\text{integrem}}{\Longrightarrow} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

aleshores,

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = e^x & \Longrightarrow & du = e^x dx \\ dv = xdx & \Longrightarrow & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx$$

$$= \frac{x^2 e^x}{2} - \int \frac{x^2 e^x}{2} dx.$$

Com es pot veure, la *nova* integral que apareix és més *complexa* que la primera que teníem.

Per tant, per a aplicar correctament el mètode d'integració per parts és importantíssim identificar correctament qui són u i dv. A vegades, una de les dues funcions no està detallada de manera explícita com veurem en l'exemple següent.

Bones i males eleccions de u i dv

És important escollir bé les funcions u i dv perquè en aplicar la fórmula d'integració per parts arribem a una integral més senzilla que la inicial.

Exemple 7

Per a calcular la integral indefinida de $f(x) = \ln(x)$ només tenim una funció, però fixeuvos que la podem reescriure com a $f(x) = 1 \cdot \ln(x)$. Aleshores,

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) & \Longrightarrow & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{bmatrix}$$

$$= uv - \int vdu = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx$$

$$= x\ln(x) - x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Recordeu que és importantíssim, quan hem calculat una integral, comprovar-ne el resultat. En aquest cas, aplicant la derivada d'un producte tenim

$$[x\ln(x) - x + C]' = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x).$$

Exercici 3 *Calculeu les primitives següents:*

a) $\int x\cos(x)dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int \arctan(x)dx$

2.4. Mètode de canvi de variable

Aquest mètode utilitza un canvi de variable o la substitució d'una variable amb l'objectiu de reescriure la integral inicial en una altra de més senzilla.

Si tenim una funció contínua $f(x)$ i considerem el canvi de variable $t = g(x)$ en què la funció g és una funció derivable, aleshores

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt.$$

És important observar que, en fer el canvi de variable, fem dues substitucions. La primera és canviar $g(x)$ per t, però observeu que també canviem $g'(x)dx$ per dt. És a dir, la igualtat s'obté de

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)dx}_{dt} = \int f(t)dt.$$

Exemple 8

Per exemple, per calcular la integral indefinida de la funció $x\sqrt{1-x^2}$, aplicarem el mètode de canvi de variable. Considerarem el canvi $t = 1 - x^2$.

Un cop idendificat el canvi, també hem de calcular el canvi per als diferencials. Això es fa derivant el canvi $t = 1 - x^2$ a l'esquerra respecte de t i a la dreta respecte de x. És a dir

$$\begin{array}{rcccl} & t & = & 1-x^2 & \\ \text{derivem respecte de } t & \downarrow & & \downarrow & \text{derivem respecte de } x \\ & 1\cdot dt & = & -2xdx & \end{array}$$

Integrals quasiimmediates

Les integrals quasiimmediates de la forma $\int f(g(x))g'(x)dx$ es poden resoldre per canvi de variable utilitzant el canvi $t = g(x)$.

Per tant, en aquest cas tenim que $t = 1 - x^2$ i que $dt = -2xdx$. Amb això ja podem aplicar el canvi de variable a la integral

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\cdot(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{3/2} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{t^3} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C,\ C \in \mathbb{R},$$

en què, en l'últim pas, desfem el canvi de variable perquè el resultat ens quedi en funció de la variable original x i no de t.

Fixeu-vos que aquesta integral també es pot considerar de tipus quasiimmediata, ja que podem identificar les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = 1-x^2$, en què $g'(x) = -2x$, de manera que

$$x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}(-2x)\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}f(g(x))g'(x).$$

L'hauríem pogut resoldre directament, o com hem fet, considerant el canvi $t = g(x) = 1-x^2$.

Exemple 9

Considerem el càlcul d'una primitiva de la funció $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ utilitzant el canvi de variable $x = t^2$.

Aleshores

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+\sqrt{t^2}}2tdt = \int \frac{2t}{1+t}dt =$$

$$= \int \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)dt$$

$$= 2t - 2\ln|1+t|$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}).$$

Exercici 4 *Calculeu les primitives següents utilitzant els canvis de variable donats en cada cas:*

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, \quad t = \sqrt{x}$

b) $\displaystyle\int x^2(1+2x^3)^3dx, \quad t = 1+2x^3$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx, \quad t = e^x$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx, \quad t = \ln(x)$

2.5. Primitives de funcions racionals

Finalment, vegem com es calculen primitives de funcions racionals, és a dir, de funcions de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en què $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis a coeficients reals, com per exemple

$$\int \frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}dx.$$

En aquest mòdul, com diem, veurem com s'integren quocients de polinomis mitjançant la seva descomposició en fraccions simples. Més concretament, estudiarem com s'integren els termes de la forma

Descomposició en fraccions simples

Aquest mòdul cal complementar-lo amb el mòdul 3 sobre funcions racionals, en què aprendreu a expressar les funcions racionals com a suma de fraccions simples.

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \frac{A}{(x-a)^m}, \qquad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

que formen part, generalment, de qualsevol descomposició en fraccions simples.

Per exemple, es pot comprovar que:

$$\frac{9x^5 - 29x^4 + 25x^3 + 45x^2 + 102x - 264}{x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 69x^2 - 36x - 108} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{10}{(x-3)^2} + \frac{4x+5}{x^2+3x+6}$$

Ara no ens centrarem en com s'expressa una funció racional com a suma de fraccions simples, ja que ho veurem més endavant en el mòdul 3 sobre funcions racionals. Per tant, en aquest subapartat només ens centrarem a aprendre com s'integra cada una de les fraccions simples per separat. No obstant això, podem avançar que les fraccions simples dependran de les arrels del polinomi del denominador $Q(x)$.

Les fraccions simples associades a arrels reals (simples o múltiples) tenen com a primitiva

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A \ln |x-a| + C,$$

en el cas de les simples, i

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \int A(x-a)^{-m}dx = \frac{A(x-a)^{-m+1}}{-m+1}$$

$$= -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{(m-1)}} + C$$

en el cas de les múltiples.

Exemple 10

La integració dels termes de la forma $\frac{A}{x-a}$ i $\frac{A}{(x-a)^m}$ dóna lloc a integrals immediates (llevat que, a vegades, cal arreglar una mica les constants). A continuació es donen alguns exemples de com es calculen primitives d'aquest tipus de fraccions simples.

$$\int \frac{4}{x+3}dx = 4\ln|x+3|$$

$$\int \frac{5}{4-x}dx = \int \frac{-5}{x-4}dx = -5\ln|x-4|$$

$$\int \frac{1}{2x-6}dx = \int \frac{1}{2(x-3)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}dx = \frac{1}{2}\ln|x-3|$$

$$\int \frac{4}{(x+4)^5}dx = 4\int (x+4)^{-5}dx = \frac{4}{-4}(x+4)^{-4} = -\frac{1}{(x+4)^4}$$

$$\int \frac{1}{(2x+6)^3}dx = \int \frac{1}{2^3(x+3)^3}dx = \frac{1}{8}\int (x+3)^{-3}dx = \frac{1}{-2\cdot 8}(x+3)^{-2}dx = -\frac{1}{16}\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$\int \frac{10}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{10}{(x-2)^2}dx = 10\int (x-2)^{-2}dx = -10(x-2)^{-1} = -\frac{10}{x-2}$$

Les fraccions simples associades a arrels complexes (que tenen per denominador un polinomi de grau dos irreductible) tenen com a primitiva

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{N+Mr}{s}\arctan\left(\frac{x-r}{s}\right) + C$$

on $r = -p/2$ i $s = +\sqrt{q-p^2/4}$.

Polinomi irreductible

Un polinomi x^2+px+q és irreductible quan l'equació $x^2+px+q = 0$ no té solucions reals.

Tot i l'expressió tancada que acabem de donar per a les primitives de fraccions simples associades a arrels complexes, és a dir, a polinomis de grau 2 irreductibles, és més útil aprendre la mecànica per a calcular la integral que no pas aprendre la fórmula de memòria. El més important és recordar que la primitiva sempre ens ha de quedar com a suma d'un logaritme més una arctangent (o a vegades només un dels dos termes). A continuació veurem quatre exemples que mostraran com es calculen aquests tipus de primitives sense utilitzar directament la fórmula.

Exemple 11. Integrals que dónen lloc a un logaritme

Calculem $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+1}dx$.

Observem que, en aquest cas, el numerador coincideix exactament amb la derivada del denominador. Som, per tant, davant d'una integral quasiimmediata (o que podríem resoldre utilitzant el canvi de variable $t = x^2 - 5x + 1$). En efecte,

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+1}dx = \ln|x^2-5x+1| + C.$$

De manera similar,

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + C.$$

Exemple 12. Integrals que dónen lloc a una arctangent

En aquest cas hem de calcular $\int \frac{1}{x^2+4}dx$, en què en el numerador no hi tenim la derivada del denominador sinó una constant. Tot i això, veiem que la funció es pot arreglar perquè ens aparegui la derivada d'una funció arcangent. En efecte,

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Cal insistir que, en l'exemple anterior, el denominador x^2+4 és un polinomi irreductible.

De manera similar, es pot utilitzar la tècnica de completació de quadrats per a simplificar el denominador quan aquest no és de la forma x^2+c, essent c una constant. En efecte, considerem el càlcul de $\int \frac{2}{x^2+2x+5}dx$. En aquest cas el denominador x^2+2x+5 conté el terme addicional $2x$, que no ens permet aplicar la tècnica anterior directament. Tot i això, fixem-nos què si considerem $(x+1)^2 = x^2+2x+1$, recuperem els dos primers termes del denominador. Per tant, el denominador el podem escriure com a $(x+1)^2+4 = x^2+2x+5$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{2}{(x+1)^2+4}dx = \int \frac{2}{4\left((\frac{x+1}{2})^2+1\right)}dx = \int \frac{1/2}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx \\ &= \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

Completació de quadrats

La completació de quadrats consisteix a reexpressar un polinomi x^2+px+q irreductible com a suma d'un quadrat més una constant, és a dir, $x^2+px+q = (x+m)^2+n$. Fent els càlculs, es pot arribar a veure que $m = p/2$ i $n = q-(p/2)^2$.

La mateixa tècnica s'aplica en l'exemple següent:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+8x+25}dx &= \int \frac{1}{(x+4)^2+9}dx = \int \frac{1}{9}\frac{1}{(\frac{x+4}{3})^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1/3}{(\frac{x+4}{3})^2+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+4}{3}\right)+C.\end{aligned}$$

En aquest cas, el denominador és $x^2+8x+25$. La tècnica de completació de quadrats ens ha de permetre reescriure el denominador perquè no aparegui el terme $8x$, per tant, hem de considerar $(x+4)^2 = x^2+8x+16$. Un cop fet això, veiem que ens falten 9 unitats per a obtenir la constant 25 del denominador, per tant, tal com s'ha expressat anteriorment, $x^2+8x+25 = (x+4)^2+9$.

Exemple 13. Integrals que dónen lloc a un logaritme més una arctangent

Quan en el numerador apareix un polinomi de grau 1 que no és un múltiple de la derivada, el primer que cal fer és fer aparèixer la derivada. Això es pot veure en l'exemple següent:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+6}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{2(2x+2)+2}{x^2+2x+5}dx = \int \left(2\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{2}{x^2+2x+5}\right)dx \\ &= 2\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{2}{(x+1)^2+4}dx.\end{aligned}$$

Fixeu-vos que en la primera igualtat hem fet aparèixer la derivada del denominador. En efecte, la derivada del denominador x^2+2x+5 és $2x+2$, mentre que en el numerador tenim $4x+6$. En aquest cas, fixeu-vos que hem de multiplicar la derivada $2x+2$ per 2 perquè ens aparegui el terme $4x$. És a dir, $2(2x+2) = 4x+4$, i després, per a obtenir la constant 6 del numerador, només ens cal afegir 2 unitats més per a obtenir $4x+6 = 2(2x+2)+2$, com s'ha detallat anteriorment.

Un cop fet això, hem d'acabar de resoldre la segona integral igual que hem fet en l'exemple anterior.

$$2\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{2}{(x+1)^2+4}dx = 2\ln(x^2+2x+5) + \int \frac{1}{4}\frac{2}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx$$

$$= 2\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{1/2}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx$$

$$= 2\ln|x^2+2x+5| + \arctan(\frac{x+1}{2}) + C.$$

Exercici 5 *Calculeu les primitives següents de funcions racionals:*

a) $\int \frac{10}{2x-5}dx$

b) $\int \frac{1}{2x^2+2}dx$

c) $\int \frac{3}{x^2+64}dx$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

e) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

f) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2}dx$

Solucions als exercicis

1. a) $\frac{1}{3}e^{3x}$, b) $\frac{1}{2}\ln|2x|$, c) $\frac{1}{5}\sin(5x)$, d) $2\sqrt{x}$

2. a) $\tan(x^3)$, b) e^{x^2}, c) $\arctan(\cos(x))$, d) $\ln|1+x^2|$

3. a) $\cos(x) + x\sin(x)$, b) $(x^2-2x+2)e^x$, c) $x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

4. a) $2e^{\sqrt{x}}$, b) $\frac{1}{24}(1+2x^3)^4$, c) $\arctan(e^x)$, d) $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$

5. a) $5\ln|2x-5|$, b) $\frac{1}{2}\arctan(x)$, c) $\frac{3}{8}\arctan(\frac{x}{8})$, d) $\arctan(x+1)$,
e) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, f) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$

Resolució detallada dels exercicis

1)

a) Per a calcular una primitiva de la funció e^{3x}, hem d'utilitzar l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció exponencial per a funcions compostes. En aquest cas tenim

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Fixeu-vos que en aquest cas $u = 3x$, per tant, per a poder aplicar la taula, hem d'introduir la derivada $u' = 3$ dins la integral, dividint per un terç per a no modificar el resultat.

b) Per a calcular una primitiva de la funció $\frac{1}{2x}$, hem d'utilitzar l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció $\frac{1}{x}$ per a funcions simples. Això sí, primer cal aplicar la linealitat de la integració per a treure la constant fora de la integral

$$\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln|x|.$$

c) Per a calcular una primitiva de la funció $\cos(5x)$, hem d'utilitzar l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció cosinus per a funcions compostes. En aquest cas tenim

$$\int \cos(5x)dx = \frac{1}{5}\int 5\cos(5x)dx = \frac{1}{5}\sin(5x).$$

Fixeu-vos que en aquest cas $u = 5x$, per tant, per a poder aplicar la taula, hem d'introduir la derivada $u' = 5$ dins la integral, dividint per un cinquè per a no modificar el resultat.

d) Per a calcular una primitiva de la funció $\frac{1}{\sqrt{x}}$, hem d'utilitzar l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció x^n per a funcions simples. Primer, però, cal reescriure la funció en aquesta forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}dx = \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C = 2\sqrt{x}.$$

Fixeu-vos que en aquest cas $n = -\frac{1}{2}$.

2)

a) Observem que podem identificar els elements següents en la integral: una funció x^3 ubicada en el denominador, i la derivada de la funció $3x^2$ en el numerador. És a dir, si considerem les funcions $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ i $g(x) = x^3$, en què $g'(x) = 3x^2$, tenim que

$$\frac{3x^2}{\cos^2(x^3)} = \frac{1}{\cos^2(x^3)}3x^2 = f(g(x))g'(x).$$

Per tant, per a calcular la primitiva només cal calcular la primitiva de $f(x)$ i avaluar-la en $g(x)$. Atès que la primitiva de $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ és $F(x) = \tan(x)$, tenim finalment que

$$\int \frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}dx = \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) = \tan(x^3).$$

Aquesta integral també l'hauríem pogut resoldre utilitzant l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció $\frac{1}{\cos^2 x}$ per a funcions compostes prenent $u = g(x) = x^3$.
A més, és fàcil comprovar que el resultat és correcte, ja que aplicant la regla de la cadena de la derivació tenim que

$$\left[\tan(x^3)\right]' = \frac{1}{\cos^2(x^3)}3x^2 = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}.$$

b) Observem que podem identificar els elements següents en la integral: una funció x^2 ubicada en l'exponent de la funció exponencial, i la derivada de la funció $2x$ multiplicant. És a dir, si considerem les funcions $f(x) = e^x$ i $g(x) = x^2$, en què $g'(x) = 2x$, tenim que

$$2xe^{x^2} = e^{x^2}2x = f(g(x))g'(x).$$

Per tant, per a calcular la primitiva només cal calcular la primitiva de $f(x)$ i avaluar-la en $g(x)$. Atès que la primitiva de $f(x) = e^x$ és $F(x) = e^x$, tenim finalment que

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) = e^{x^2}.$$

Aquesta integral també l'hauríem pogut resoldre utilitzant l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció exponencial per a funcions compostes prenent $u = g(x) = x^2$.
A més, és fàcil comprovar que el resultat és correcte, ja que aplicant la regla de la cadena de la derivació tenim que

$$\left[e^{x^2}\right]' = e^{x^2}2x = 2xe^{x^2}.$$

c) Observem que podem identificar els elements següents en la integral: una funció $\cos(x)$ ubicada en el denominador, i la derivada de la funció $-\sin(x)$ en el numerador. És a dir, si considerem les funcions $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i $g(x) = \cos(x)$, en què $g'(x) = -\sin(x)$, tenim que

$$\frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = f(g(x))g'(x).$$

Per tant, per a calcular la primitiva només cal calcular la primitiva de $f(x)$ i avaluar-la en $g(x)$. Atès que la primitiva de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és $F(x) = \arctan(x)$, tenim finalment que

$$\int \frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) = \arctan(\cos(x)).$$

Aquesta integral també l'hauríem pogut resoldre utilitzant l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció $\frac{1}{1+x^2}$ per a funcions compostes prenent $u = g(x) = \cos(x)$.
A més, és fàcil comprovar que el resultat és correcte, ja que aplicant la regla de la cadena de la derivació tenim que

$$[\arctan(\cos(x))]' = \frac{1}{1+\cos^2(x)}(-\sin(x)) = \frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.$$

d) Observem que podem identificar els elements següents en la integral: una funció $1 + x^2$ ubicada en el denominador, i la derivada de la funció $2x$ en el numerador. És a dir, si considerem les funcions $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = 1 + x^2$, en què $g'(x) = 2x$, tenim que

$$\frac{2x}{1 + x^2} = f(g(x))g'(x).$$

Per tant, per a calcular la primitiva només cal calcular la primitiva de $f(x)$ i avaluar-la en $g(x)$. Atès que la primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ és $F(x) = \ln|x|$, tenim finalment que

$$\int \frac{2x}{1 + x^2}dx = \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) = \ln|1 + x^2|.$$

Aquesta integral també l'hauríem pogut resoldre utilitzant l'entrada de la taula 1, que ens dóna la primitiva de la funció $\frac{1}{x}$ per a funcions compostes prenent $u = g(x) = 1 + x^2$. A més, és fàcil comprovar que el resultat és correcte, ja que aplicant la regla de la cadena de la derivació tenim que

$$\left[\ln|1 + x^2|)\right]' = \frac{1}{1 + x^2}2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

3)

a) Per calcular la integral indefinida de $f(x) = x\cos(x)$, aplicarem el mètode d'integració per parts. Considerarem les parts següents: $u = x$ i $dv = \cos(x)dx$.
Aleshores,

$$\int x\cos(x)dx = \begin{bmatrix} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = \cos(x)dx & \Longrightarrow & v = \sin(x) \end{bmatrix}$$

$$= uv - \int vdu = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x).$$

Recordeu que és importantíssim, quan hem calculat una integral, comprovar el resultat. En aquest cas, aplicant la derivada d'un producte tenim

$$[x\sin(x) + \cos(x)]' = \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x).$$

b) Per calcular la integral indefinida de $f(x) = x^2e^x$, aplicarem el mètode d'integració per parts. Considerarem les parts següents: $u = x^2$ i $dv = e^xdx$.
Aleshores,

$$\int x^2e^xdx = \begin{bmatrix} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2xdx \\ dv = e^xdx & \Longrightarrow & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= uv - \int vdu = x^2e^x - \int 2xe^xdx.$$

Veiem que, després d'aplicar una vegada la regla d'integració per parts, obtenim una integral més senzilla (polinomi de grau 1 en lloc de grau 2) però que cal resoldre aplicant la integració per parts un altre cop. Aquest cop prendrem $u = 2x$ i $dv = e^xdx$.

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2x & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^xdx & \Longrightarrow & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= x^2e^x - \left(uv - \int vdu\right)$$

$$= x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Comprovem el resultat. En aquest cas, aplicant la derivada d'un producte tenim

$$[x\sin(x) + \cos(x)]' = \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x).$$

c) Per a calcular la integral indefinida de $f(x) = \arctan(x)$ només tenim una funció, però fixeu-vos que la podem reescriure com a $f(x) = 1 \cdot \arctan(x)$. Aleshores,

$$\int \arctan(x)dx = \int 1 \cdot \arctan(x)dx = \begin{bmatrix} u = \arctan(x) & \Longrightarrow & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{bmatrix}$$

$$= uv - \int vdu = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Observeu que en l'última igualtat hem tret el valor absolut, ja que la funció $1 + x^2$ és sempre positiva.
Comprovem el resultat aplicant la derivada d'un producte i la regla de la cadena

$$\left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]' = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}2x$$

$$= \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \arctan(x).$$

4)

a) Considerem el càlcul d'una primitiva de la funció $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ utilitzant el canvi de variable $t = \sqrt{x}$. Aleshores

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{bmatrix} = 2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int e^t dt = 2e^t = 2e^{\sqrt{x}}.$$

b) Considerem el càlcul d'una primitiva de la funció $x^2(1 + 2x^3)^3$ utilitzant el canvi de variable $t = 1 + 2x^3$. Aleshores

$$\int x^2(1+2x^3)^3dx = \begin{bmatrix} t = 1+2x^3 \\ dt = 6x^2dx \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\int (1+2x^3)^3 6x^2dx = \frac{1}{6}\int t^3dt$$
$$= \frac{1}{6\cdot 4}t^4 = \frac{1}{24}(1+2x^3)^4.$$

c) Considerem el càlcul d'una primitiva de la funció $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ utilitzant el canvi de variable $t = e^x$. Aleshores

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{e^x(e^x+e^{-x})}e^x dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1}e^x dx$$
$$= \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan(t) = \arctan(e^x).$$

d) Considerem el càlcul d'una primitiva de la funció $\frac{\ln(x)}{x}$ utilitzant el canvi de variable $t = \ln(x)$. Aleshores

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \begin{bmatrix} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$

5)

a) $\int \frac{10}{2x-5}dx = 5\int \frac{2}{2x-5}dx = 5\ln|2x-5|$

b) $\int \frac{1}{2x^2+2}dx = \int \frac{1}{2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\arctan(x)$

c) $\int \frac{3}{x^2+64}dx = \int \frac{3}{64\left(\frac{x^2}{64}+1\right)}dx = \frac{3}{64}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{8}\right)^2+1}dx = \frac{3\cdot 8}{64}\int \frac{1/8}{\left(\frac{x}{8}\right)^2+1}dx = \frac{3}{8}\arctan(\frac{x}{8})$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \arctan(x+1)$

e) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1\right)}dx = \frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{2})^2+1}dx =$
$\frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx = \frac{4\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

f) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-1}{x^2+2x+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+$
$2x+2| - \arctan(x+1) = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$

Bibliografia

Aguiló, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1994). *Temes clau de càlcul*. Edicions de la UPC. Servei de publicacions. Barcelona, Espanya

Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias*. Pearson. Madrid, Espanya.

Perelló, C. (1994). *Càlcul Infinitesimal. Amb mètodes numèrics i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana. Barcelona, Espanya

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2013). *Matemáticas para la ingeniería*. Pearson. Madrid, Espanya.