Continuïtat i derivabilitat

Derivades i aplicacions

Mei Calm
Ramon Masià
Joan Carles Naranjo
Núria Parés
Francesc Pozo
Jordi Ripoll
Teresa Sancho

PID_00212662
Mòdul 1.2

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

El càlcul diferencial i el concepte de derivada són molt probablement les aportacions més importants i influents de la matemàtica aplicada. Els mètodes i tècniques del càlcul diferencial van ser inventats i desenvolupats al final del segle XVII per Newton i Leibniz independentment, i d'ençà de llavors que les derivades han estat una eina per a resoldre una infinitat de problemes: des de la determinació de la tangent a una corba, passant per problemes d'optimització de tota mena i acabant per les equacions diferencials que modelitzen molts dels fenòmens del món real.

En aquest mòdul treballarem el concepte de derivada d'una funció en un punt, que informalment podem dir que es correspon amb la variació de la funció en aquell punt. Per exemple, en el moviment d'un objecte, la derivada de la posició de l'objecte respecte del temps dóna la velocitat a què es mou. Després de donar la definició formal de derivada, aprofundirem en la seva interpretació geomètrica: pendent de la *recta tangent*. En segon lloc, estudiarem la funció derivada, és a dir, una nova funció que dóna la derivada en cada un dels punts, i les regles de derivació fent èmfasi en la (important) *regla de la cadena* que ens permet calcular la derivada d'una composició de funcions. En l'apartat de les aplicacions, estudiarem el creixement/decreixement d'una funció i els seus extrems relatius i ho aplicarem a la representació gràfica de funcions.

Finalment, farem una interpretació de la derivada com a taxa/ritme de canvi d'una magnitud/quantitat que depèn d'una altra.

1. Derivació

1.1. Definició de derivada en un punt

El marc general en el qual introduirem el concepte de derivada és el marc de les funcions reals contínues de variable real. La derivada d'una funció representa el canvi infinitessimal de la funció respecte de la seva variable.

Comencem doncs definint formalment el concepte de derivada d'una funció $f(x)$ en un punt $x = x_0$ com

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (1)$$

si aquest límit existeix. Dit en paraules, la derivada d'una funció en un punt és el límit del quocient entre l'increment de la funció i l'increment de la variable independent $h = x - x_0$ quan aquest últim tendeix a zero.

La notació $f'(x_0)$, que es llegeix "*efa prima de* x_0", és deguda a Newton. Quan existeix el límit $f'(x_0)$ i és finit diem que la funció $f(x)$ és derivable en x_0. A la pràctica, però, poques vegades es calculen les derivades per mitjà del límit de la definició sinó que es calculen més fàcilment a partir de les derivades elementals i les regles de derivació, que relacionen derivades i operacions, com veurem en els subapartats següents.

La condició de ser derivable és més restrictiva que la de ser contínua. Reescrivint el límit de la definició de derivada es comprova que, si una funció és derivable en un punt, llavors necessàriament ha de ser contínua en aquest punt: $f(x_0) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h)$.

1.1.1. Interpretació geomètrica

Geomètricament, el valor de la derivada en un punt x_0, $f'(x_0)$, és el pendent (*la inclinació* respecte de l'eix horitzontal) de la recta tangent en aquell punt x_0 (vegeu la figura 1). Per tant, la derivada ens diu com varia localment la funció en aquell punt i ens dóna la direcció que segueix la funció en aquell punt.

Figura 1. La derivada en un punt x_0 és el pendent de la recta tangent

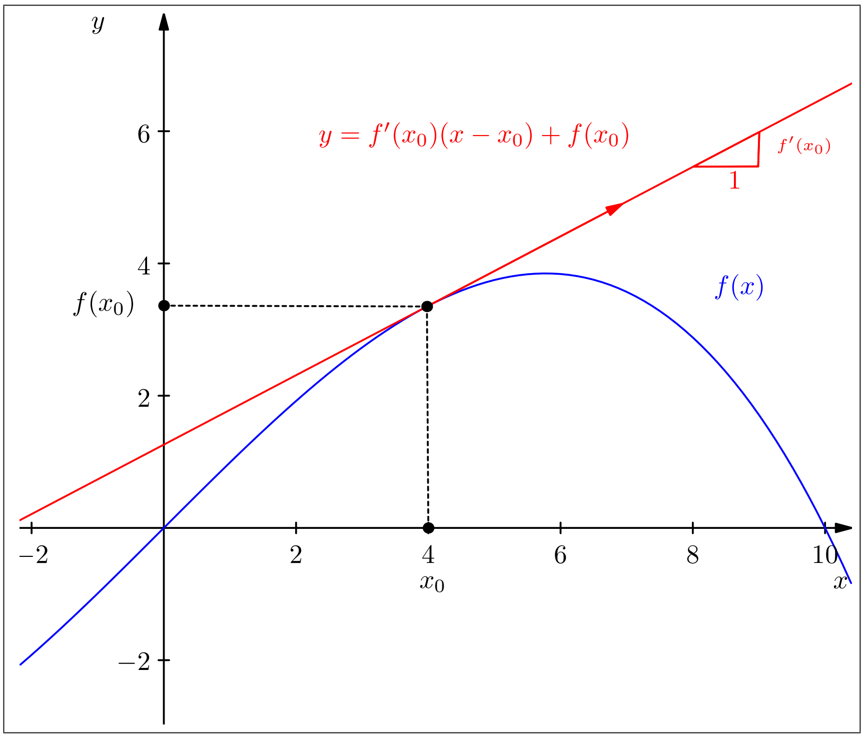


Figura 1

La recta tangent talla localment en un sol punt la gràfica de la funció.

L'equació de la recta tangent és $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, ja que és la recta que passa pel punt de coordenades $(x_0, f(x_0))$ i té pendent $f'(x_0)$.

Exercici 1 *Donada la funció* $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 1$, *trobeu la recta tangent en* $x_0 = 2$. *Per a calcular la derivada useu les derivades bàsiques i les regles de derivació.*

1.2. Funció derivada

La funció derivada $f'(x)$ és la funció que per cada punt x ens dóna el valor de la derivada de la funció $f(x)$ en aquell punt.

Donada una funció f definim la funció derivada com

$$f' : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f'(x),$$

amb domini del conjunt A de punts en què la funció f és derivable.

1.2.1. Càlcul de les derivades de les funcions elementals

Usant la definició formal de derivada en un punt, el límit (equació 1) per un punt variable, es pot calcular la funció derivada per a cada una de les funcions elementals: els polinomis, les exponencials i logaritmes, i les funcions periòdiques sinus i cosinus.

Els polinomis són funcions que es basen en les operacions aritmètiques de suma/resta i producte. La derivada d'un polinomi del tipus $f(x) = x^n$, en què $n \geq 0$ és el grau del polinomi, és $f'(x) = nx^{n-1}$, que té un grau menys que el polinomi original i està definit per a tot valor de x.

Derivada d'un monomi

$f(x) = x^n$ és $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 1

Per a calcular la derivada de la funció $f(x) = x$ en $x_0 = 3$ usant la definició, cal fer:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x - 3} = \lim_{x\to 3} 1 = 1$$

És clar que si en lloc de 3 posem qualsevol valor, a, $f'(a) = 1$. Per tant, si $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.

Exercici 2 *Calculeu la derivada de $f(x) = 2$ i de $g(x) = x^2$ usant la definició.*

Aquesta derivada es pot estendre a valors negatius de n i fins i tot a valors racionals (i a reals també!). Per exemple, $f(x) = \sqrt{x}$ definida per $x \geq 0$, que correspon a una potència d'exponent $n = 1/2$, té derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, que existeix per a $x > 0$.

Exercici 3 *Calculeu la derivada de $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}$. Per a quins valors de x està definida la funció i la seva derivada? Treballeu els exponents amb fraccions.*

Més enllà dels polinomis tenim les funcions exponencials i logarítmiques. Hi ha diverses maneres de definir formalment aquestes funcions, però la idea intuïtiva que representa la funció exponencial és la d'un creixement molt ràpid. Quan observem una magnitud que té un creixement molt ràpid, es diu que creix exponencialment i, al contrari, si creix molt lentament llavors tenim la funció logarítmica, que és la seva inversa.

Derivada de l'exponencial

$f(x) = e^x$ és $f'(x) = e^x$.

Derivada del logaritme

$f(x) = \ln(x)$ és $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Recordem que la funció exponencial natural és $y = e^x$, en què el nombre $2 < e = 2{,}718281\cdots < 3$ és la base i x és l'exponent. El logaritme neperià o natural és la funció inversa de l'exponencial:

Nota

Quan la base és a:
$a^x = e^{x \ln a}$, $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$,
$(a > 0, a \neq 1)$.

$$y = e^x \quad \leftrightarrow \quad x = \ln(y)\ .$$

Més en general, les funcions exponencials de base $a > 0$ són de la forma $y = a^x$ i són totes equivalents en el sentit que $a^x = e^{kx}$ per a una constant k adequada. Les funcions logarítmiques de base $a > 0$: $x = \log_a(y)$ són les seves inverses.

Una manera de caracteritzar la funció exponencial és dient que la derivada és ella mateixa, si $y = e^x$ llavors $y' = e^x$ per a qualsevol valor de x, i que $e^0 = 1$. Per altra banda, la funció logaritme, vista com a funció de la variable $x > 0$ i no com a funció inversa, compleix que $y = \ln(x)$ i $y' = \frac{1}{x}$.

Derivada del sinus

$f(x) = \sin(x)$ és
$f'(x) = \cos(x)$.

Les funcions periòdiques bàsiques són el sinus i el cosinus, ja que fent combinacions i canviant la *freqüència angular* s'obtenen les altres funcions periòdiques, per exemple, $y = \sin(2x) + 3\cos(5x)$ és una funció periòdica.

Derivada del cosinus

$f(x) = \cos(x)$ és
$f'(x) = -\sin(x)$.

Les funcions sinus i cosinus compleixen que en derivar-les s'intercanvien entre elles llevat d'un signe, més concretament: si $y = \sin x$, llavors $y' = \cos x$ i si $y = \cos x$ llavors $y' = -\sin x$.

Recordeu

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

1.2.2. Regles de derivació

Les regles de derivació ens permeten calcular les derivades de funcions construïdes a partir de les funcions elementals i les operacions aritmètiques de suma/resta i producte/divisió. Usant les propietats dels límits, obtenim les regles següents:

1) (Producte per nombre) $y = af(x)$, llavors $y' = af'(x)$.

2) (Suma de funcions) $y = f(x) + g(x)$, llavors $y' = f'(x) + g'(x)$.

És a dir, un factor constant multiplicand es pot treure fora de la derivada, i la derivada d'una suma és suma de derivades (ja que el límit d'una suma és suma de límits). Combinant les dues regles obtenim la resta i més en general una combinació lineal: $y = af(x) + bg(x)$, llavors $y' = af'(x) + bg'(x)$ en què a,b són dos nombres reals qualssevol. Per exemple, el polinomi de grau 4: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 7$ té derivada $P'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$, que és un polinomi de grau 3.

Exercici 4 *Calculeu la derivada de la funció* $y = 100e^x - 10x^4 - \frac{1}{x}$.

Per altra banda, la derivada del producte no resulta ser el producte de derivades, però tenim una fórmula que ens dóna la derivada del producte i semblantment per a la divisió:

Regles de la derivació

Si f i g són funcions derivables, i a és un nombre:

- $(a \cdot f)' = a \cdot f'$
- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $(f + g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

3) (Producte) $y = f(x)g(x)$, llavors $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

4) (Divisió) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, llavors $y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

És a dir, la derivada d'un producte és la derivada del primer pel segon sense derivar més la derivada del segon pel primer sense derivar. Per a la divisió que és semblant, s'ha de tenir en compte que tant la funció com la seva derivada només estan definides pels valors de x que $g(x) \neq 0$.

Amb les regles fetes fins ara ja podem calcular la derivada d'una funció racional (quocient de polinomis). Per exemple, $y = \frac{20x^2}{1+5x^2}$, $y' = \frac{40x}{(1+5x^2)^2}$, que està definida per tot x.

Funció sinc

La funció sinc s'usa per processar senyals digitals.

Exercici 5 *Considereu la funció contínua $y = \frac{\sin(x)}{x}$, anomenada funció sinc. Calculeu-ne la derivada. Quin és el valor de la funció en $x = 0$?*

Regla de la cadena

La regla de la cadena s'usa per a calcular la derivada de la composició de funcions.

Si f i u són dues funcions que es poden compondre, aleshores, la derivada de la composició $(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x)$.

Exemple 2

Si $f(x) = 3x + 2$ i $u(x) = \sin(x)$, aleshores, $(f \circ u)(x) = 3\sin(x) + 2$, $f'(x) = 3$, $u'(x) = \cos(x)$, per tant, $(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x) = 3\cos(x)$.

Exercici 6 *Calculeu $(f \circ u)'(x)$ si $f(x) = \tan(x)$, $u(x) = \ln(x)$.*

1.2.3. Taula de derivades

Els resultats obtinguts en els subapartats anteriors es resumeixen i s'amplien en la taula 1.

Taula 1

Funcions simples	Funcions compostes $u = u(x)$
$y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$	$y = u^n$, $y' = nu^{n-1}u'$
$y = \sqrt[n]{x}$, $n \neq 0$, $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{u}$, $y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^x$, $y' = e^x$	$y = e^u$, $y' = e^u u'$
$y = a^x$, $a > 0$, $y' = a^x \ln(a)$	$y = a^u$, $y' = a^u \ln(a)u'$
$y = \sin(x)$, $y' = \cos(x)$	$y = \sin(u)$, $y' = \cos(u)u'$
$y = \cos(x)$, $y' = -\sin(x)$	$y = \cos(u)$, $y' = -\sin(u)u'$
$y = \tan(x)$, $y' = 1 + \tan^2(x)$	$y = \tan(u)$, $y' = (1 + \tan^2(u))u'$
$y = \ln(x)$, $y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln(u)$, $y' = \frac{u'}{u}$
$y = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $y' = \frac{1}{x\ln(a)}$	$y = \log_a(u)$, $y' = \frac{u'}{u\ln(a)}$
$y = \arcsin(x)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin(u)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
$y = \arccos(x)$ $y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos(u)$ $y' = \frac{1}{-\sqrt{1-u^2}}u'$
$y = \arctan(x)$ $y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan(u)$ $y' = \frac{1}{1+u^2}u'$

1.2.4. Derivades laterals

En comprovar la derivabilitat d'una funció en un punt per a la definició formal, pot passar que no existeixi el límit però que sí existeixin els límits laterals per la dreta i per l'esquerra.

Definim les derivades laterals per la dreta i per l'esquerra:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

respectivament. Si coincideixen les derivades laterals $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, llavors la funció és derivable en aquell punt.

En alguns problemes apareixen funcions amb valor absolut. El cas més senzill correspon a la funció mateixa valor absolut $f(x) = |x| = \max\{x, -x\}$, que és contínua en tots els punts i derivable en tots els punts excepte en $x = 0$.

Exemple 3

La funció contínua $f(x) = |(x+5)(x-10)|$ es pot definir a trossos: $f(x) = -(x+5)(x-10)$ si $-5 \leq x \leq 10$ i $f(x) = (x+5)(x-10)$ altrament. La derivada també la podem calcular a trossos:

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x-5) & -5 < x < 10 \\ 2x-5 & x > 0 \text{ o } x < -5 \end{cases} ,$$

i en $x = -5$ i $x = 10$ la funció no és derivable, ja que les derivades laterals no coincideixen.

Exercici 7 *Considereu la funció definida a trossos $f(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$ per $x \geq 0$ i $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$ per $x < 0$. Estudieu la continuïtat i la derivabilitat de la funció.*

1.3. Derivades d'ordre superior

Derivades d'ordre superior

La derivada segona és la derivada de la derivada, i aixi successivament...

Donada una funció f derivable podem considerar la funció f' derivada de f. Suposant que la funció f' estigui definida en un interval I, podem considerar els punts en què és derivable i la funció derivada corresponent, que denotarem amb f''. Així, f' l'anomenarem derivada primera de f, f'' l'anomenarem derivada segona de f. La derivada de f'' la denotarem amb f''' i l'anomenarem derivada tercera de f. En general, la derivada definida per recurrència la denotarem amb $f^{n)}$ i l'anomenarem derivada n-èsima de f, o bé, derivada d'ordre n de f.

Exemple 4

Considerem la funció $f(x) = 3^x$, llavors calculant unes poques derivades podem obtenir l'expressió de la derivada n-èsima de f,

$$f'(x) = 3^x \ln(3),\ f''(x) = 3^x(\ln(3))^2,\ \cdots,\ f^{n)}(x) = 3^x(\ln(3))^n$$

Exemple 5

Considerem ara la funció $f(x) = \ln(1 + x)$, llavors

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$f^{\prime iv}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

$$\ldots$$

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

Exercici 8 *Calculeu la primera i la segona derivada per a cada una de les funcions següents respecte de la seva variable independent.*

a) $x = 2\cos(3t) - \sin(3t)$ *b)* $y = 10(1+3x)e^{-3x}$

c) $x = t\sin(2t) + \cos(2t)$ *d)* $z = \frac{y^3}{1+y^2}$

Exercici 9 *Calculeu les tres primeres derivades de la funció* $f(x) = \frac{1}{x+2}$ *i d'això deduïu una fórmula per a la derivada n-èsima.*

2. Aplicacions

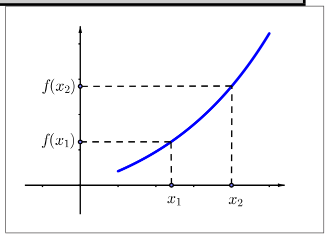
En aquest apartat veurem algunes aplicacions de la derivació: el signe de la derivada ens permet decidir sobre el creixement i el decreixement d'una funció; la derivada també és útil en la cerca d'extrems d'una funció i, per això, també en la resolució de problemes d'optimització.

2.1. Creixement i decreixement d'una funció

En primer lloc, definirem els conceptes de funció creixent i funció decreixent.

Considerem una funció f definida en un interval obert (a,b) i prenem dos punts qualssevol x_1, x_2 d'aquest interval amb $x_1 < x_2$, llavors:

Gràfica d'una funció estrictament creixent



1) Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ direm que f és monòtona creixent en (a,b).

2) Si $f(x_1) \geq f(x_2)$ direm que f és monòtona decreixent en (a,b).

3) Si $f(x_1) < f(x_2)$ direm que f és estrictament creixent en (a,b).

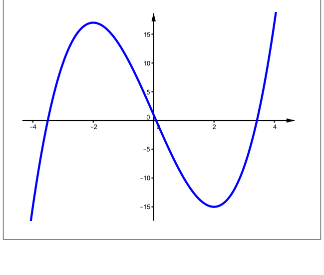
4) Si $f(x_1) > f(x_2)$ direm que f és estrictament decreixent en (a,b).

En la figura al marge es pot veure la gràfica d'una funció estrictament creixent.

Vegem com a partir de la derivada podem decidir si una funció és creixent o decreixent.

> Considerem una funció f derivable en un interval obert (a,b), llavors:
>
> **1)** Si $f'(x) \geq 0$ per a tot $x \in (a,b)$, llavors f és monòtona creixent en (a,b).
>
> **2)** Si $f'(x) \leq 0$ per a tot $x \in (a,b)$, llavors f és monòtona decreixent en (a,b).
>
> **3)** Si $f'(x) = 0$ per a tot $x \in (a,b)$, llavors f és constant en (a,b).

Gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 12x + 1$



Per exemple, si considerem la funció $f(x) = x^3 - 12x + 1$, en calculem la derivada $f'(x) = 3x^2 - 12$ i estudiem en quins punts s'anul·la aquesta derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ o } x = -2$$

Observem que $f'(x) > 0$ si $x < -2$ o $x > 2$ i $f'(x) < 0$ si $-2 < x < 2$, per tant f és creixent a $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ i és decreixent en l'interval $(-2,2)$, tal com es pot veure en la figura del marge.

Exercici 10 *Estudieu el creixement i decreixement de les funcions:*

a) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

b) $g(x) = xe^x$

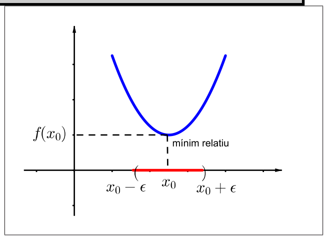
2.1.1. Extrems relatius. Punts crítics

Suposem una funció f definida en un interval (a,b).

- Direm que f té un màxim relatiu en el punt $x_0 \in (a,b)$ si existeix un entorn de x_0 que escriurem $(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)$ tal que per a qualsevol valor x dins d'aquest entorn, $x \in (x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)$, es verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.
- Direm que f té un mínim relatiu en el punt $x_0 \in (a,b)$ si existeix un entorn de x_0 que escriurem $(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)$ tal que per a qualsevol valor x dins d'aquest entorn, $x \in (x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)$, es verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

Un punt en què la funció tingui un màxim o un mínim relatiu s'anomena un **extrem relatiu**.

Gràfica d'una funció amb un mínim relatiu.



Al marge podeu veure la gràfica d'una funció amb un mínim relatiu en què podem observar que la imatge del punt x_0 seria la més petita d'entre tots els punts de l'interval $(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)$.

A continuació veurem una condició necessària perquè una funció tingui un extrem relatiu en un punt. Suposem que f és una funció real definida en un interval (a,b). Suposem que f té un extrem relatiu en $x_0 \in (a,b)$ i que f és derivable en x_0. Llavors podem assegurar que $f'(x_0) = 0$.

Per exemple, la funció $f(x) = x^2$ sabem que té un mínim en $x = 0$, i com que $f'(x) = 2x$, llavors $f'(0) = 0$.

El recíproc no és cert, és a dir, és possible trobar una funció f derivable com ara $f'(x_0) = 0$ però x_0 no és un extrem relatiu. Per exemple, si $f(x) = x^3$, llavors $f'(0) = 0$ però f no té màxim ni mínim relatiu en cap punt.

Els punts on $f'(x) = 0$ s'anomenen **punts singulars o crítics**.

Una funció pot tenir un extrem relatiu en un punt sense necessitat de ser derivable. Per exemple, la funció $f(x) = |x|$ té un mínim relatiu en $x = 0$, i en canvi f no és derivable en $x = 0$.

Resumint, podem dir que els extrems relatius d'una funció f es troben entre:

1) els punts crítics de f

2) els punts de no derivabilitat de f

3) els extrems del domini de la funció f

Criteri de la primera derivada per a la classificació dels extrems relatius

Podem estudiar la derivada per la dreta i per l'esquerra d'aquests punts de manera que, si la funció creix per l'esquerra de x_0 i decreix per la dreta de x_0, deduirem que en x_0 la funció té un màxim relatiu, i si la funció decreix per l'esquerra de x_0 i creix per la dreta de x_0, deduirem que en x_0 la funció té un mínim relatiu.

Exemple 6

Considerem la funció $f(x) = 2x - 3x^{2/3} + 1$ que està definida en tots els reals. Els seus extrems relatius els buscarem entre els punts crítics de f,

$$f'(x) = 2 - 2x^{-1/3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

i els punts en què la funció no és derivable. Observem que f no és derivable per $x = 0$. Llavors estudiem el signe de la derivada per la dreta i per l'esquerra d'aquests punts i obtenim com a resultat el que es representa en l'esquema al marge. La gràfica de la funció f està representada en la figura 2. Podem veure que els punts de no derivabilitat ($x = 0$) són punts en forma de punxa i en aquest punt hi hauria infinites tangents, en canvi el punt crític de la funció ($x = 1$) verifica que la seva tangent és paral·lela a l'eix OX, ja que té pendent zero.

Classificació dels extrems relatius

Criteri de la primera derivada per la classificació dels extrems relatius de la funció $f(x) = 2x - 3x^{2/3} + 1$:

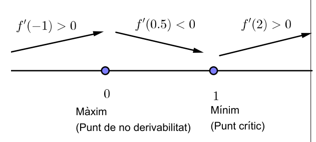
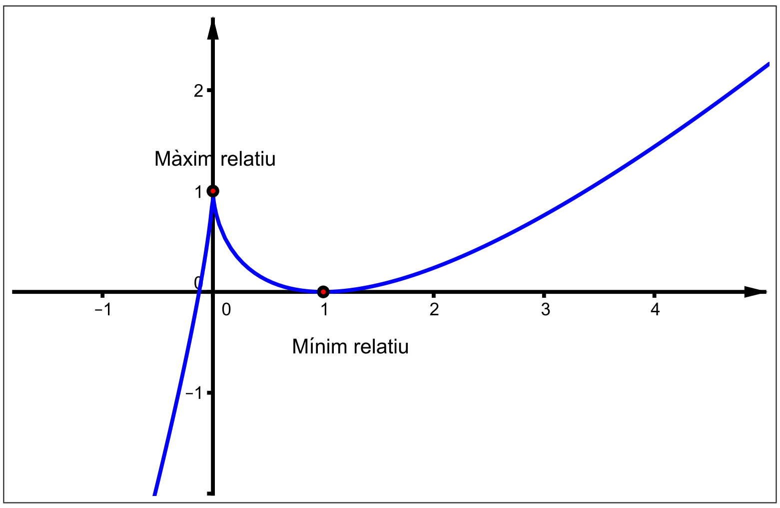


Figura 2. Gràfica de la funció $f(x) = 2x - 3x^{2/3} + 1$



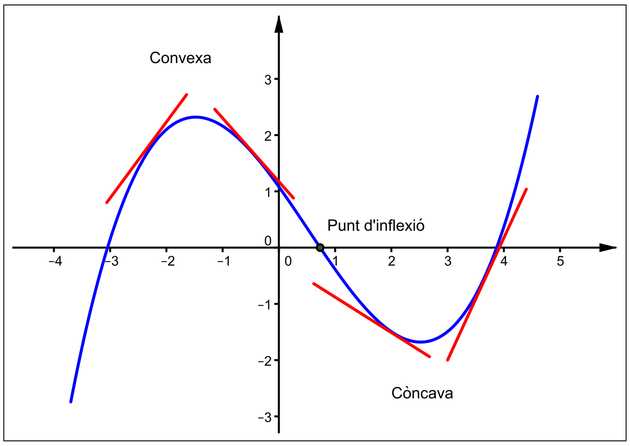
Exercici 11 *Determineu els extrems relatius de la funció* $f(x) = x - x^{2/3}$.

2.2. Concavitat i punts d'inflexió d'una funció

Direm que f es còncava en un interval obert (a,b) si és derivable en (a,b) i la seva derivada f' és una funció creixent en (a,b). De manera semblant, direm que f és convexa en (a,b) si existeix f' i és decreixent en (a,b).

En la figura 3 podem observar que si f és còncava en un interval, llavors la gràfica de f està per sobre de les seves tangents en aquest interval, i si f és convexa, la gràfica de f està per sota de les seves tangents en aquest interval.

Figura 3. Concavitat, convexitat i punt d'inflexió d'una funció f



Els punts que separen zones de concavitat oposada es diuen **punts d'inflexió**.

Criteri de la segona derivada per a l'estudi de la concavitat:

1) Si $f''(x) > 0$ en un interval (a,b), llavors f és còncava en (a,b).

2) Si $f''(x) < 0$ en un interval (a,b), llavors f és convexa en (a,b).

3) Si f té un punt d'inflexió en un punt x_0 i existeix $f''(x_0)$, llavors $f''(x_0) = 0$.

Per tant, per a obtenir els punts d'inflexió d'una funció f dues vegades derivable, només hem de trobar els punts com ara $f''(x) = 0$. Però observem que no tots els punts que verifiquen la condició $f''(x) = 0$ són punts d'inflexió. Per exemple, la funció $f(x) = x^4$ té derivada segona $f''(x) = 12x^2$ i, per tant, $f''(0) = 0$, però en canvi $x = 0$ no és un punt d'inflexió per a la funció $f(x) = x^4$, ja que aquesta funció és sempre còncava.

Igual que en el cas dels extrems relatius, per a decidir si un punt x_0 candidat a ser punt d'inflexió ho és o no, podem fer un estudi del signe de la derivada segona per la dreta i per l'esquerra de x_0 de manera que si hi ha canvi de concavitat i x_0 pertany al domini de la funció, podrem assegurar que x_0 és un punt d'inflexió.

Exemple 7

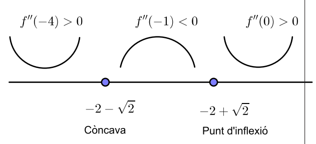
Trobem els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = x^2e^x$. Per això, primer calculem la primera derivada, $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$, i llavors calculem els zeros de la segona derivada,

$$f''(x) = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (2 + 4x + x^2)e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 - \sqrt{2} \text{ o } x = -2 + \sqrt{2}$$

Fent l'estudi del signe de la derivada segona per la dreta i per l'esquerra d'aquests punts obtenim l'esquema que es representa al marge, del qual es pot deduir que la funció és còncava a $(-\infty,-2-\sqrt{2})\cup(-2+\sqrt{2},+\infty)$ i convexa a $(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$. Els punts $x = -2-\sqrt{2}$ i $x = -2 + \sqrt{2}$ són punts d'inflexió.

Estudi de la concavitat i la convexitat de una funció

Esquema de l'estudi de la concavitat i la convexitat de la funció $f(x) = x^2e^x$:



La derivada segona també ens permet donar informació sobre els extrems relatius.

Criteri de la segona derivada per a la classificació dels extrems relatius:

1) Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, llavors f té un mínim relatiu en $x = x_0$.

2) Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, llavors f té un màxim relatiu en $x = x_0$.

3) Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$, llavors no podem extreure cap conclusió. La funció f pot tenir un màxim relatiu o un mínim relatiu o un punt d'inflexió en $x = x_0$.

Exemple 8

En l'exemple anterior, els punts crítics de la funció $f(x) = x^2e^x$ s'obtenen de

$$f'(x) = (2x + x^2)e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ o } x = -2$$

Llavors

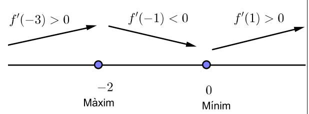
$f''(-2) = -2e^{-2} < 0$, per tant $x = -2$ és un màxim relatiu.

$f''(0) = 2 > 0$, per tant $x = 0$ és un mínim relatiu.

A vegades el càlcul de la segona derivada pot ser complicat, per això, a l'hora de classificar els extrems relatius és més fàcil utilitzar el criteri de la primera derivada tal com es pot veure en la figura al marge.

Classificació dels extrems relatius

Criteri de la primera derivada per a la classificació dels extrems relatius de $f(x) = x^2e^x$:



Exercici 12 *Calculeu els extrems relatius i punts d'inflexió de la funció* $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

2.3. Representació gràfica de funcions

Considerem una funció $y = f(x)$. La gràfica de la funció f és el conjunt de punts del pla:

$$G(f) = \{(x,f(x)) \text{ on } x \in Dom(f)\}$$

A continuació veurem unes pautes que convé seguir per a dibuixar un croquis aproximat de la gràfica d'una funció. Ho anirem explicant sobre la funció

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$$

1) Determinar el domini $Dom(f)$ de la funció. Estudiar la continuïtat de f en els punts de $Dom(f)$. Si un punt a no pertany al domini de la funció, però és un punt frontera del domini de f, convindrà calcular els límits laterals, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i/o $\lim_{x\to a^-} f(x)$. Si algún d'aquests límits és $+\infty$ o $-\infty$, la recta $x = a$ serà una asímptota vertical de la gràfica de f.

En el nostre exemple, com que $Dom(f) = \mathbb{R}$, no és procedent fer aquest estudi asimptòtic. La funció f és contínua a R, ja que és la composició de la funció polinòmica $f_1(x) = x^2(x + 1)$ i de la funció $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, totes dues contínues a $\mathbb{R}$.

2) Asímptotes

En el nostre exemple no tenim asímptotes verticals, ja que el domini són tots els reals. Tampoc no hi ha asímptotes horitzontals, ja que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(x+1)} = +\infty.$$

Vegeu també

El càlcul de les asímptotes ja s'ha estudiat al subapartat 2.3.2. del mòdul 1.1.

Calculem les asímptotes obliqües, $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^2(x+1)} - x) = +\infty - \infty$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^2(x+1)} - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^2(x+1)} - x)(\sqrt[3]{x^4(x+1)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+1)} + x^2)}{\sqrt[3]{x^4(x+1)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+1)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x+1) - x^3}{\sqrt[3]{x^4(x+1)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+1)} + x^2} = \frac{1}{3}$$

Per tant, $y = x + 1/3$ és una asímptota obliqua.

3) Punts d'intersecció amb l'eix d'abscisses. Si l'equació $f(x) = 0$ és de resolució fàcil, convindrà buscar les arrels (zeros) d'aquesta equació, les quals es correspondran amb les abscisses dels punts d'intersecció de la gràfica de f amb l'eix d'abscisses.

Si ha estat possible determinar aquests zeros de la funció, resultarà convenient estudiar el signe de la funció. Si una funció presenta canvis de signe, aquests s'han de produir necessàriament en els zeros de la funció, o en els punts de discontinuïtat, o en els punts frontera del domini.

En el nostre exemple, els zeros de la funció són els punts $x = -1$ i $x = 0$.

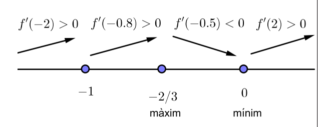
4) Estudi del creixement o monotonia. Determinació dels extrems relatius

Buscarem l'expressió de la derivada f' de la funció. És possible que la funció deixi de ser derivable en algun punt del *Dom*(f). Per aquest motiu, caldrà determinar el domini de la derivabilitat de la funció. Amb la intenció d'estudiar el signe de f', buscarem els zeros de l'equació $f'(x) = 0$ que pertanyin al domini de derivabilitat de la funció f. L'estudi del signe de f' el farem tenint en compte que els canvis de signe de f' (si n'hi ha) s'han de produir necessàriament en els zeros de f', o en els punts de discontinuïtat de f, o en els punts de discontinuïtat de f'.

En els punts en què la derivada f' és positiva, la funció serà estrictament creixent, i en els punts en què la derivada és negativa, la funció serà estrictament decreixent. La funció presenta un extrem relatiu en els punts del domini de la funció en què hi hagi un canvi de monotonia. Si la funció és derivable en aquests punts, la derivada haurà de ser necessàriament nul·la. Es tractarà d'un màxim o un mínim.

En el nostre exemple, $f'(x) = \frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$. El domini de derivabilitat de la funció f és $R - \{-1,0\}$. La derivada f' només s'anul·la en el punt $x = -2/3$. L'estudi del signe de la derivada f' i de la monotonia de f, queda reflectit en la figura que teniu al marge.

Monotonia de la funció
$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$



Per tant, la funció té un màxim relatiu en $x = -2/3$ (punt crític) i un mínim relatiu en $x = 0$ (punt de no derivabilitat).

5) Estudi de la concavitat. Punts d'inflexió

Buscarem l'expressió de la segona derivada f''. Determinarem igualment el domini de f'' que, en tot cas, no podrà superar el domini de derivabilitat de f. Amb l'objectiu d'estudiar el signe de f'', buscarem els zeros de l'equació $f''(x) = 0$ que pertanyin al domini de f''. L'estudi del signe de f'' el farem tenint en compte que els canvis de signe de f'' (si n'hi ha) s'han de produir necessàriament en els zeros de f'', o en els punts de discontinuïtat de f, f' i f''.

En els punts en què f'' és positiva, la funció és còncava, i en els punts que f'' és negativa, la funció és convexa. La funció presentarà un punt d'inflexió en els punts interiors del domini de la funció que siguin frontera entre dues regions de concavitat de signe contrari. Si en aquests punts existeix la segona derivada, aquesta haurà de ser necessàriament nul·la.

En el nostre exemple, $f''(x) = \frac{-2}{9x(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$, el domini de f'' coincideix amb el domini de derivabilitat de f, la segona derivada f'' no s'anul·la en cap punt, i l'estudi del signe de la segona derivada f'' i de la concavitat de f queda reflectit en la figura que teniu al marge.

Per tant, la funció té un punt d'inflexió en $x = -1$.

Amb tot aquest estudi, la gràfica de la funció està determinada per la figura 4.

Concavitat de la funció $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$

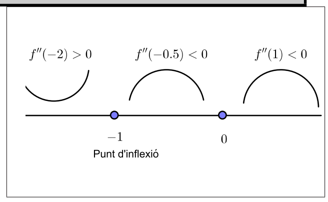
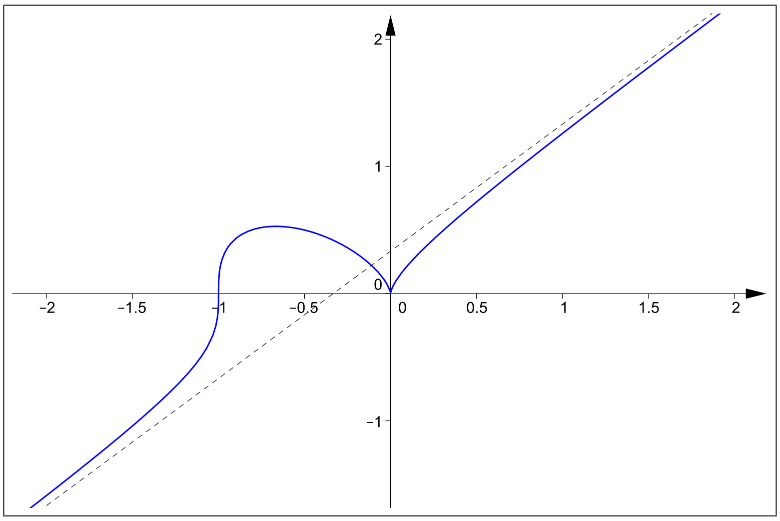


Figura 4. Gràfica de la funció $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$



A banda d'aquests passos generals que acabem de descriure, podem fer unes comprovacions amb vista a simplificar la representació:

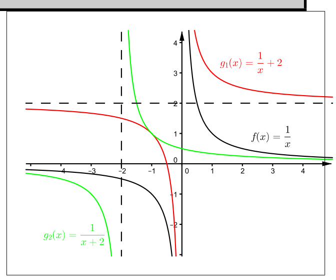
1) Comprovar si l'expressió de f és el resultat d'aplicar a una funció g elemental o ja coneguda, una translació en la direcció de l'eix d'abscisses ($f(x) = g(x + a)$) o una translació en la direcció de l'eix d'ordenades ($f(x) = g(x) + b$), o una çompressió"o "dilatació"en la direcció de l'eix d'abscisses ($f(x) = g(kx)$, $k > 0$), o una çompressió"o "dilatació"en la direcció de l'eix d'ordenades ($f(x) = kg(x)$, $k > 0$), o una simetria respecte de l'eix d'abscisses ($f(x) = -g(x)$), o una simetria respecte de l'eix d'ordenades ($f(x) = g(-x)$), o una combinació de dues o més d'aquestes transformacions.

Si és així, el coneixement de la gràfica de g ens ajudarà a intuir, i fins i tot a dibuixar enterament, la gràfica de la funció f.

Exemple 9

En la figura al marge es representa la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ (en negre), la funció $g_1(x) = \frac{1}{x} + 2$ (en vermell) que s'obté de la gràfica de $f(x)$ traslladada dues unitats cap amunt, i la gràfica de $g_2(x) = \frac{1}{x+2}$ (en verd) que s'obté de traslladar la funció $f(x)$ dues unitats cap a l'esquerra.

Gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ i les seves translacions



2) Estudiar l'existència de possibles simetries respecte dels eixos de coordenades, és a dir:

- Si $f(-x) = f(x)$ per a qualsevol $x \in Dom(f)$, la gràfica de f és simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

- Si $f(-x) = -f(x)$ per a qualsevol $x \in Dom(f)$, la gràfica de f és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

3) Estudi de la periodicitat. Si existeix un valor real $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$, per a qualsevol $x \in Dom(f)$, llavors la funció és periòdica. En aquest cas, caldrà buscar el valor més baix de p que compleix aquesta propietat. Llavors n'hi haurà prou de representar la gràfica de f en un interval qualsevol $[a, a + p] \subset Dom(f)$ i, segons la periodicitat de f, estendre-la a la resta del domini.

A continuació presentarem un altre exemple. Farem un estudi complet de la funció $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ fins a obtenir-ne una representació gràfica aproximada.

1) Domini: els únics punts en què la funció no està definida són aquells on $x^2 - 1 = 0$, per tant quan $x = 1$ o $x = -1$ i, per tant, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

2) Simetries: veiem que $f(-x) = e^{\frac{1}{(-x)^2-1}} = e^{\frac{1}{x^2-1}} = f(x)$, per tant és una funció simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

3) Asímptotes:

Per obtenir les asímptotes verticals, calculem els límits als extrems del domini:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

Per tant, $x = 1$ és una asímptota vertical per la dreta.

$$\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Per tant, $x = -1$ és una asímptota vertical per l'esquerra.

Per obtenir les asímptotes horitzontals calculem els límits a $+\infty$ i a $-\infty$.

$$\lim_{x\to +\inf} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

Per tant, $y = 1$ és una asímptota horitzontal.

4) Estudi de la monotonia. Determinació dels extrems relatius. Com que les funcions exponencials són derivables i la divisió de funcions derivables és derivable al seu domini, la funció serà derivable al seu domini i

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Observem que $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$, per tant $x = 0$ és l'únic extrem relatiu possible. Com que $f'(x) > 0$ si $x < 0$ i $f'(x) < 0$ si $x > 0$, tindrem que $f(x)$ és creixent a $(-\infty, -1) \cup (-1,0)$, decreixent a $(0,1) \cup (1, +\infty)$, i a $x = 0$ hi haurà un màxim relatiu.

5) Estudi de la concavitat. Punts d'inflexió.

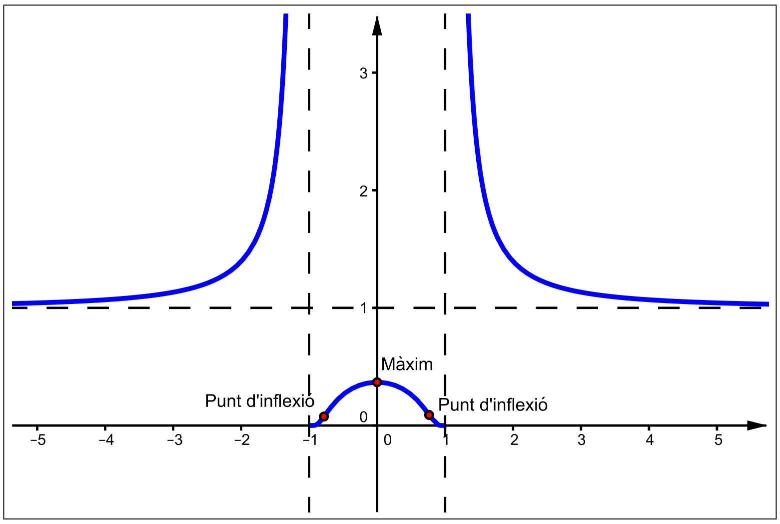
Calculem la segona derivada i obtenim $f''(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{6x^4-2}{(x^2-1)^4}$. Igualem aquesta derivada a zero per obtenir els possibles punts d'inflexió:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^4 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \approx \pm 0{,}76$$

A més, $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-1)\cup(-1,-0{,}76)\cup(0{,}76,1)\cup(1,+\infty)$ i $f''(x) > 0$ per $x \in (-0{,}76, 0{,}76)$ i, per tant, $f(x)$ és convexa a $(-\infty,-1)\cup(-1,-0{,}76)\cup(0{,}76,1)\cup(1,+\infty)$ i còncava a $(-0{,}76, 0{,}76)$, i podem dir que $x = -0{,}76$ i $x = 0{,}76$ són punts d'inflexió.

Finalment i d'acord amb tots els passos anteriors, la gràfica de la funció està determinada per la figura 5.

Figura 5. Gràfica de la funció $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$



Exercici 13 *Feu una representació gràfica de la funció* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ *fent prèviament un estudi complet de la funció.*

Exercici 14 *Feu una representació gràfica de la funció* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3}$ *fent prèviament un estudi complet de la funció.*

3. Derivada i quocient de diferencials

La definició de derivada a partir del càlcul d'un límit permet usar unes tècniques per a calcular la funció derivada i algunes regles per a derivar moltes funcions i operacions entre funcions. Hi ha, però, una altra metodologia, deguda a Leibniz, que permet obtenir el mateix resultat (derivades de funcions) usant una tècnica diferent: el càlcul mitjançant el quocient de diferencials. En aquest curs només en farem una breu introducció, especialment pel que fa a la seva utilitat en certs contextos.

Si considerem una funció $y = f(x)$, la notació diferencial $\frac{dy}{dx}$, que es llegeix "*d de y partit per d de x*", contrasta amb la notació funcional de Newton (f'). Definim

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \, ,$$

essent $\Delta x, \Delta y$ els increments en x i y respectivament. Aquesta definició és equivalent a la definició de derivada que hem fet al principi del tema.

En els orígens del càlcul diferencial, la derivada d'una magnitud respecte d'una altra s'escrivia i s'interpretava com un quocient: $\frac{dy}{dx}$ és la variació de la variable dependent y respecte de la variació (arbitràriament petita) de la variable independent x. Aquesta notació és molt útil i adequada encara avui dia, especialment per a l'aplicació de *la regla de la cadena*, el càlcul de la derivada de la funció inversa i també per a la resolució d'equacions diferencials ordinàries pel mètode de separació de variables.

També quan parlem de taxa de canvi o ritme de variació o velocitat de variació (o expressions similars) d'una magnitud, ens referim a la derivada de la magnitud respecte de la seva variable independent.

Exemple 10

Si deixem caure un objecte des d'una altura de 100 m, la seva posició en vertical, suposant caiguda lliure, està representada per $x(t) = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ metres, en què $t \geq 0$ és el temps en segons, i llavors la seva velocitat és $v(t) = \frac{dx}{dt} = -9{,}8t$ m/s i la seva acceleració és constant $a(t) = \frac{dv}{dt} = -9{,}8$ m/s^2.

Velocitat

La velocitat és l'espai recorregut dividit entre el temps transcorregut.

Exercici 15 *Si la posició d'un objecte en caiguda lliure és* $x(t) = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ *metres, quant temps (en segons) tarda a arribar a terra (*$x = 0$*) i a quina velocitat ho fa (en metres per segon)?*

Hi ha diverses maneres d'escriure la derivada d'una funció $y = f(x)$. Les expressions següents són equivalents:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

És especialment útil la notació diferencial perquè permet tractar $\frac{dy}{dx}$ com si fos un quocient, amb numerador i denominador. Aquesta manera de manipular els diferencials és especialment indicada en alguns casos, com veurem a continuació.

3.1. Derivada de la funció inversa

Seguint amb la notació de Leibniz, la derivada de la funció inversa es calcula de la manera següent:

Funció inversa

Si la funció original és $x \mapsto y$, la funció inversa és $y \mapsto x$.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

Per tant, només cal fer 1 dividit per la derivada de la funció original i posar x en funció de y, és a dir, $x = f^{-1}(y)$. Per exemple, si $y = \ln(x)$, $x > 0$, llavors $x = e^y$ i derivant $\frac{dx}{dy} = e^y = x$, per tant fent inversos obtenim $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Les derivades de les funcions trigonomètriques inverses s'obtenen de manera semblant. Per exemple, si $y = \arctan(x)$, llavors $x = \tan y$ i derivant $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, per tant fent inversos obtenim $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercici 16 *Considereu* $y = \frac{x}{1+x}$, $x \geq 0$. *Calculeu la funció inversa, és a dir, x en funció de y, i calculeu les derivades* $\frac{dy}{dx}$ *i* $\frac{dx}{dy}$ *per separat.*

3.2. Regla de la cadena

L'ús de la notació diferencial també és útil per a simplificar la derivació d'una composició de funcions quan usem la regla de la cadena.

Suposem que tenim una variable y que depèn de la variable x. Suposem ara que tenim una tercera variable z que depèn de la segona variable y. Si encadenem aquests dos fets tenim que l'última variable z també depèn de la primera x (variable independent). A més, ens pot interessar saber com varia z respecte de x:

Cadena de variables

$x \to y \to z$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

És a dir, la variació de z respecte de x és la variació de z respecte de y per la variació de y respecte de x. Aquesta fórmula és una altra manera de veure la derivació d'una composició de funcions: $(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x)$, on $y = u(x)$ i $z = f(y)$.

Exemple 11

Considereu un globus esfèric que s'està inflant amb aire. En un cert instant de temps t el radi del globus és de $r = 6$ centímetres i està creixent a un ritme de $\frac{dr}{dt} = 2$ centímetres per segon. A quin ritme està creixent el volum V del globus, en centímetres cúbics, en aquest mateix instant? Per una banda, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ i $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ i, per altra banda, la regla de la cadena ens diu que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$. Finalment tenim $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot 2 = 288\pi = 904{,}8$ cm^3/s.

Exercici 17 *L'evolució de la població (en milers d'individus) d'una certa espècie està determinada per* $x(t) = \frac{100}{1+4e^{-2t}}$*, en què t és el temps en anys. Calculeu el ritme de creixement de la població* $\frac{dx}{dt}$ *en milers d'individus per any.*

Equació logística

Creixement d'una població amb recursos limitats.

Solucions als exercicis

1) Funció $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 1$, derivada $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + x$ i recta tangent en $x_0 = 2$: $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 10(x-2) + 3$.

2) $f'(x) = 0$, $g'(x) = 2x$.

3) Funció $f(x) = x^{-13/6}$ i derivada $f'(x) = -\frac{13}{6x^{19/6}}$ que existeixen per a $x > 0$.

4) Funció $y = 100e^x - 10x^4 - x^{-1}$ i derivada $y' = 100e^x - 40x^3 + \frac{1}{x^2}$.

5) Límit de la funció per a L'Hôpital $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. Derivada per la regla del quocient: $y' = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

6) La derivada de la composició és $(1 + \tan(\ln(x))^2) \cdot \frac{1}{x}$.

7) La funció $f(x)$ és contínua en tots els punts, ja que $f(0) = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, i és derivable en tots els punts excepte en $x = 0$ en què no coincideixen les derivades laterals $f'_+(0) = 1/2$ i $f'_-(0) = 1$.

8) Derivades segones:

a) $x'' = -9(2\cos(3t) - \sin(3t))$ b) $y'' = 90(-1 + 3x)e^{-3x}$

c) $x'' = -4t\sin(2t)$ d) $z'' = -\frac{2y(y^2-3)}{(1+y^2)^3}$

9) $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$, $f''(x) = \frac{2!}{(x+2)^3}$, $f'''(x) = \frac{-3!}{(x+2)^4}$, $f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$,.

10)

a) De la funció $f(x) = (x^2-4)^2$ calculem la derivada $f'(x) = 4x(x^2-4)$ i estudiem en quins punts s'anul·la aquesta derivada.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ x = -2,\ x = 2$$

Llavors estudiem el signe de la derivada per la dreta i per l'esquerra d'aquests punts i tenim que $f'(-3) < 0$, $f'(-1) > 0$, $f'(1) < 0$ i $f'(3) > 0$, per tant $f(x)$ és creixent a $(-2,0) \cup (2,+\infty)$ i decreixent a $(-\infty,-2) \cup (0,2)$.

b) De la funció $f(x) = xe^x$ calculem la derivada i estudiem en quins punts s'anul·la aquesta derivada.

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Llavors estudiem el signe de la derivada per la dreta i per l'esquerra de $x = -1$ i tenim que $f'(-2) < 0$ i $f'(0) > 0$, per tant $f(x)$ és decreixent a $(-\infty,-1)$ i creixent a $(-1,+\infty)$.

11) Els possibles extrems de la funció $f(x) = x - x^{2/3}$ els busquem entre els punts crítics

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{27}$$

i els punts en què la funció no és derivable, que és el punt $x = 0$, ja que aquest punt anul·la el denominador de la derivada. Apliquem el criteri de la primera derivada per classificar els extrems relatius i obtenim que $f(x)$ té un màxim relatiu en el punt (0,0) i un mínim relatiu en el punt $(\frac{8}{27}, \frac{-4}{27})$.

12) Busquem la primera derivada de la funció $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ per trobar els possibles extrems.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = x^2(4x - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Utilitzem el criteri de la segona derivada per a classificar aquests extrems.

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

$f''(0) = 0$ per tant, no classifica

$f''(3/2) > 0$ per tant, en $x = 3/2$ hi ha un mínim relatiu

Per trobar els punts d'inflexió busquem els punts que anul·len la segona derivada.

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ x = 1$$

Estudiem el signe de la segona derivada per la dreta i per l'esquerra d'aquests punts i, com que hi ha un canvi de concavitat en aquests punts, podem dir que $x = 0$ i $x = 1$ són punts d'inflexió.

13) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$. La funció té dues asímptotes verticals, $x = -1$ i $x = 1$, i una asímptota obliqua $y = x$. L'únic punt de tall amb els eixos de coordenades és el punt (0,0). Per l'estudi de la monotonia calculem la derivada $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$. La funció creix a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ i decreix a $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \sqrt{3})$, té un màxim relatiu en $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$, un mínim relatiu en $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ i un punt d'inflexió en (0,0). La funció és convexa a $(-\infty,1) \cup (0,1)$ i cóncava a $(-1,0) \cup (1, +\infty)$.

14) $Dom(f) = (0, +\infty)$. $x = 0$ és una asímptota vertical per la dreta i $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan x tendeix a $+\infty$. La funció creix a $(0, \exp(1/3))$

i decreix a $(\exp(1/3), +\infty)$. A $x = \exp(1/3)$ la funció té un màxim relatiu. La funció és convexa a $(0, \exp(7/12)$ i cóncava a $(\exp(7/12), +\infty)$. El punt $\exp(7/12)$ és un punt d'inflexió.

15) Posició $x(t) = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ m., velocitat $v(t) = \frac{dx}{dt} = -9{,}8t$ m/s, posició inicial $x(0) = 100$, posició final: $0 = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ al temps $t = \sqrt{200/9{,}8} \simeq 4{,}52$ s i amb velocitat $v = -9{,}8 \cdot 4{,}52 \simeq 44{,}3$ m/s.

16) Aïllant x obtenim la inversa: $(1 + x)y = x$, $xy - x = -y$, $x(y - 1) = -y$, $x = \frac{y}{1-y}$. Derivades: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}$ i $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(1-y)^2}$.

17) Població $x(t) = 100(1 + 4e^{-2t})^{-1}$ i ritme de creixement

$$\frac{dx}{dt} = -100(1 + 4e^{-2t})^{-2} \cdot 4e^{-2t} \cdot (-2) = \frac{800\, e^{-2t}}{(1 + 4e^{-2t})^2} > 0$$

usant repetidament la regla de la cadena.

Bibliografia

Aguiló, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1994). *Temes clau de càlcul*. Edicions de la UPC. Servei de publicacions. Barcelona, Espanya

Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias*. Pearson. Madrid, Espanya.

Perelló, C. (1994). *Càlcul Infinitesimal. Amb mètodes numèrics i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana. Barcelona, Espanya

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2013). *Matemáticas para la ingeniería*. Pearson. Madrid, Espanya.