Continuïtat i derivabilitat

Límits i continuïtat

Mei Calm
Ramon Masià
Joan Carles Naranjo
Núria Parés
Francesc Pozo
Jordi Ripoll
Teresa Sancho

PID_00212661
Mòdul 1.1

Universitat Oberta de Catalunya

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i de la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia, o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars del copyright.

Índex

Introducció

En aquest mòdul treballarem els conceptes de límit i continuïtat de funcions. El primer correspon al d'aproximació successiva: donada una col·lecció de nombres la idea de límit reflecteix la noció que aquests nombres s'acosten cada cop més a un nombre donat. El concepte de continuïtat és molt intuïtiu un cop entès que les funcions es poden representar mitjançant una gràfica. Quan aquesta gràfica es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper diem que la funció és contínua. Una formulació més precisa (i la d'altres conceptes com asímptota o derivada) necessita la noció de límit que es coverteix així en el mecanisme bàsic sobre el qual es construeix la teoria de les funcions. Caldrà doncs assentar bé aquesta idea abans de res i, és clar, aprendre a calcular-los en les situacions més usuals.

1. Successions

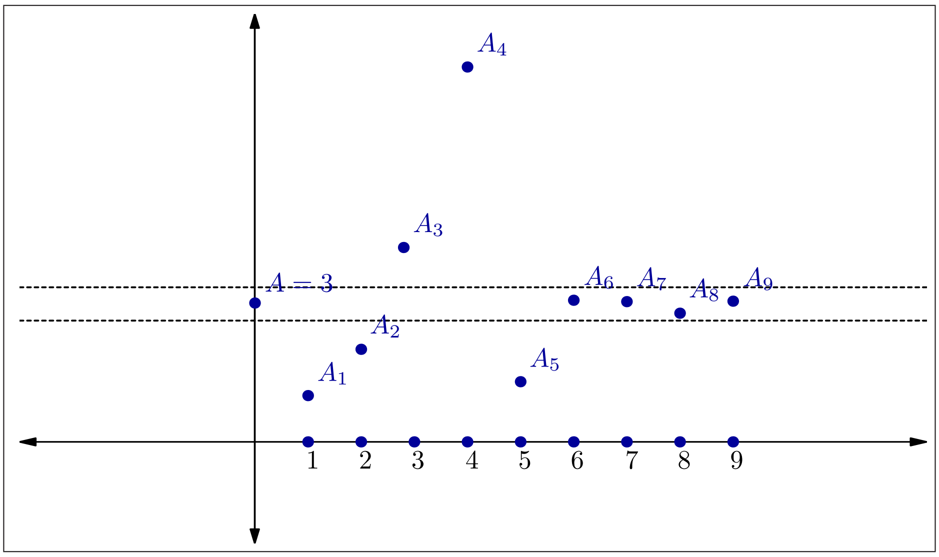
1.1. Límits de successions

Una **successió** és una col·lecció infinita numerada de nombres reals.

En una successió, que hi hagi un ordre és fonamental: hi ha un primer nombre (que denotem A_1), un segon A_2, un tercer A_3, etc. Per exemple 1, 2, 3, ... és una successió que no para de créixer. Direm que és la successió $A_n = n$ (el terme quinzè A_{15} és 15, el terme dos-centè A_{200} és 200,...). La majoria de les successions que veurem estan determinades per una fórmula en funció de la variable n com per exemple $A_n = \frac{1}{n}$ o $A_n = (-1)^n$ o $A_n = 3$. El darrer exemple rep el nom de successió constant perquè tots els seus termes són iguals. No obstant això, no sempre es podrà donar una expressió així: els decimals del nombre π són infinits 3,14159... sense cap "regularitat". O sigui, la successió $A_1 = 1$, $A_2 = 4$, $A_3 = 1$, $A_4 = 5$, $A_5 = 9$, ... no és fàcilment expressable com una fórmula.

Dibuixem en el pla els eixos coordenats i marquem els punts (n,A_n). Què significa que els punts tendeixin a un valor determinat A? Voldrà dir que si fixem una banda horitzontal tan prima com es vulgui centrada en $y = A$, tots els punts (per una n prou gran) queden dins la banda. En la figura 1 tenim una successió amb límit $A = 3$.

Figura 1. Una successió amb límit 3



Les següents són tres successions diferents amb aquest límit:

1) $B_n = 3$ (successió constant)

2) $C_n = 3 + \frac{1}{n}$

3) $D_1 = 3{,}1$, $D_2 = 3{,}01$, $D_3 = 3{,}001$, $D_4 = 3{,}0001, \ldots$

En tots tres casos direm que el límit és 3 i escriurem:

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = 3, \qquad \lim_{n\to+\infty} C_n = 3 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} D_n = 3.$$

Més en general, quan la successió A_n tendeix a un nombre A, diem que "A_n tendeix a A quan n tendeix a ∞" i usem la notació:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A.$$

Quins valors possibles tenim per a A? Pot ser 0, qualsevol altre nombre real o també més o menys infinit (usem els símbols ∞ o $+\infty$ i $-\infty$). Un exemple de successió amb límit 0 és $A_n = \frac{1}{n}$ perquè en créixer la n, el valor de $\frac{1}{n}$ és tan proper a 0 com vulguem. Que el límit sigui infinit vol dir que per molt gran que agafem un nombre M sempre trobem un terme de la sucessió tal que ell i *tots* els que el segueixen són més grans que M. Anàlogament definim el cas de menys infinit: per molt negatiu que sigui un nombre $-M$ la successió és inferior a $-M$ a partir d'algun terme de la successió. Per exemple les successió $A_n = n, B_n = n^2, C_n = \sqrt{n}$ té límit ∞ i, en canvi, $A_n = -n, B_n = -n^2, C_n = -\sqrt{n}$ té límit $-\infty$.

Notació

Per a denotar 'més infinit' usarem els símbols ∞ o $+\infty$, i per a denotar 'menys infinit', $-\infty$. Si volem fer referència a algun d'aquests símbols, independentment del signe, usarem els símbols $\pm\infty$.

Exercici 1 *Calculeu els límits*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} (n^2+1), \qquad \lim_{n\to+\infty} (n-n^2).$$

Hi ha successions, també, que no tendeixen a cap d'aquests valors, diem que no tenen límit. Observem que $A_n = (-1)^n$ (és a dir la successió $-1,1,-1,1,\ldots$) no té límit, ja que si fem una banda prima al voltant del nombre 1 tenim infinits elements fora de la banda i el mateix passa si la banda la fem al voltant del nombre -1.

Per a fer càlculs és de molta utilitat tenir presents algunes propietats dels límits en relació amb les operacions més habituals (suma, resta, producte i potència).

Suposem donades dues successions A_n i B_n amb límits A i B respectivament, o sigui:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} B_n = B.$$

Aleshores:

1) El límit de la successió suma $A_n + B_n$ és $A + B$ i el de la diferència $A_n - B_n$ és $A - B$, o sigui:

$$\lim_{n\to+\infty} (A_n + B_n) = A + B \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} (A_n - B_n) = A - B$$

2) El límit de la successió producte $A_n \cdot B_n$ és $A \cdot B$:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n \cdot B_n = A \cdot B.$$

3) Suposem que tots els termes B_n són diferents de zero, aleshores el límit de la successió quocient $\frac{A_n}{B_n}$ és $\frac{A}{B}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{A}{B}.$$

4) Suposem que tots els termes A_n són positius i que $A > 0$, aleshores el límit de la successió $A_n^{B_n}$ és A^B:

$$\lim_{n\to+\infty} (A_n)^{B_n} = A^B.$$

Observació

En general, si $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ i $\lim_{n\to+\infty} B_n = B$, normalment:

- $\lim_{n\to+\infty} (A_n + B_n) = A + B$
- $\lim_{n\to+\infty} (A_n - B_n) = A - B$
- $\lim_{n\to+\infty} A_n \cdot B_n = A \cdot B$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{A}{B}$
- $\lim_{n\to+\infty} (A_n)^{B_n} = A^B$

Exercici 2 *Donades les successions $A_n = 5 + \frac{1}{n}$ i $B_n = \frac{3}{n}$ calculeu*

$$\lim_{n\to+\infty} (A_n + B_n), \quad \lim_{n\to+\infty} (A_n - B_n), \quad \lim_{n\to+\infty} (A_n \cdot B_n), \quad \lim_{n\to+\infty} (A_n)^{B_n}.$$

Observacions:

1) L'expressió $A + B$ s'ha d'interpretar correctament quan A o B (o tots dos!) són $\pm\infty$. Per exemple $\infty + B = \infty$ o $-\infty + B = -\infty$ quan B és un nombre real. En canvi no podem aplicar la fórmula quan $A = \infty$ i $B = -\infty$ (o al revés). El resultat pot ser qualsevol cosa, depén de quines successions siguin, i s'ha d'analitzar cada cas en particular. Quan això passa diem que és una **indeterminació**. Això no vol dir que el límit no es pugui calcular sinó que utilitzant les operacions

Nota

Si el resultat de les operacions dels límits són $A + B = \infty - \infty$, $A \cdot B = 0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{A}{B} = \frac{0}{0}$, $\frac{A}{B} = \pm\frac{\infty}{\infty}$, $A^B = 1^{\pm\infty}$, ens trobem davant d'una indeterminació, que es resol manipulant convenientment l'expressió del terme general de la successió.

habituals trobem una expressió que no ens permet decidir-ne, de moment, el valor. En aquests casos necessitarem mètodes de càlcul alternatius.

2) El mateix comentari podem fer per al cas del producte, si $B \neq 0$ és un nombre real positiu, aleshores $\pm\infty \cdot B = \pm\infty$. També tenim $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$ i $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$. En canvi, el cas $0 \cdot (\pm\infty)$ és, com abans, una indeterminació, per tant també aquí haurem de buscar altres mètodes per a aquest càlcul.

3) En el cas del quocient, quan B és $\pm\infty$ i A és un nombre real, aleshores el límit és 0. Quan $B = 0$ i A és un nombre real també tenim una altra indeterminació: per exemple, si sempre tenim $B_n > 0$ el límit serà ∞, però si sempre $B_n < 0$, aleshores $-\infty$, fins i tot pot no haver-hi límit si els termes de la successió B_n van alternant el seu signe. Altres indeterminacions apareixen quan A i B són simultàniament 0 o $\pm\infty$, diem que són del tipus $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

4) Quan l'exponent tendeix a infinit (o sigui $B = \infty$) aleshores el resultat del límit depèn de la base: si $0 < A < 1$, el límit és 0 i si $A > 1$ el límit és ∞. El cas 1^∞ és novament una indeterminació.

En el proper subapartat parlarem de com tractar les indeterminacions més freqüents.

Exercici 3 *Calculeu*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n.$$

1.2. Indeterminacions

En aquest subapartat tractem algunes de les indeterminacions que ens hem trobat anteriorment, concretament les del tipus $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ i 1^∞. Les discutim cas per cas.

1.2.1. Indeterminacions del tipus $\infty - \infty$

Considerem dues successions A_n i B_n totes dues amb límit ∞. Per a calcular el límit de la successió $A_n - B_n$, sovint és útil multiplicar i dividir per la suma $A_n + B_n$. Veiem-ho en un cas concret: les successions $\sqrt{n^2+1}$ i $\sqrt{n^2-1}$ tenen límit infinit. Calculem el límit de la diferència multiplicant i dividint per $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = 0$$

Exercici 4 *Calculeu* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

1.2.2. Indeterminacions del tipus $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$

Aquestes tres indeterminacions les hem agrupat perquè en el fons són la mateixa. Si per exemple A_n té límit 0 i B_n té límit infinit aleshores posant

$$A_n \cdot B_n = A_n \cdot \frac{1}{1/B_n}$$

transformem una indeterminació del tipus $0\cdot\infty$ en una altra del tipus $\frac{0}{0}$. De la mateixa manera si A_n i B_n tenen límit infinit, posant

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{1/A_n}{1/B_n}$$

transformem una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$ en una altra $\frac{0}{0}$. Una mica més endavant, en aquest mateix mòdul donarem un mètode força potent per a tractar aquests casos amb l'ajuda de l'estudi de les funcions (canviem la n per una x i veiem A_n com una funció). De totes maneres podem donar ara la solució per a un cas molt freqüent d'aquests tipus d'indeterminacions: els quocients de polinomis. Suposem que ens trobem un límit com el següent:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2}$$

Intuïtivament podem pensar que el límit és zero, ja que el denominador té un grau més alt i per tant creixerà més de pressa, però com podem fer el càlcul per a estar-ne segurs? La idea és molt senzilla: dividim numerador i denominador per n^3 (s'agafa el grau més gran dels dos)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+1)/n^3}{(n^3+2)/n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Observeu que amb el mateix truc, si el grau del polinomi del denominador és més alt el límit és infinit. Finalment veiem amb un exemple què passa en el cas del mateix grau:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+n^2+1}{5n^3+2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n^3+n^2+1)/n^3}{(5n^3+2n+1)/n^3} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{5}.$$

Podem resumir el que hem obtingut en la següent

Càlcul de límits per a quocients de polinomis. Resum:

El límit del quocient de dos polinomis és

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_r n^r + \cdots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } s > r \\ \infty & \text{si } s < r \quad \text{i} \quad \frac{a_r}{b_s} > 0 \\ -\infty & \text{si } s < r \quad \text{i} \quad \frac{a_r}{b_s} < 0 \\ \frac{a_r}{b_s} & \text{si } r = s. \end{cases}$$

Exercici 5 *Calcula* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{3n^2-n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{n+3}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2+1}{n+2}$.

1.2.3. Indeterminacions del tipus 1^∞

Per a resoldre aquest cas necessitarem una de les successions més conegudes $A_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, que resulta tenir límit. Per definició el resultat d'aquest límit és el nombre $e = 2{,}7182...$ (amb infinits decimals i no periòdic). Més en general, per a qualsevol successió C_n amb límit infinit tenim que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{C_n}\right)^{C_n} = e.$$

El que fem per resoldre les indeterminacions del tipus 1^∞ és relacionar la successió $A_n^{B_n}$ amb una altra que tingui l'aspecte de les que tenen límit e. Concretament:

$$A_n^{B_n} = (1 + A_n - 1)^{B_n} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{A_n-1}}\right)^{B_n} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{A_n-1}}\right)^{\frac{1}{A_n-1}\cdot(A_n-1)\cdot B_n}$$

Com que A_n tendeix a 1, tenim que $\frac{1}{A_n-1}$ tendeix a infinit, per tant podem aplicar el resultat d'abans amb $C_n = \frac{1}{A_n-1}$ i obtenim una expressió per a resoldre aquestes indeterminacions:

Càlcul de les indeterminacions del tipus 1^∞:

Tenim que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^{B_n} = e^{\lim_{n\to+\infty}(A_n-1)\cdot B_n}.$$

Per exemple volem calcular el límit de

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}.$$

Observem que, si apliquem la recepta del límit de quocients de polinomis, tenim que és una indeterminació del nostre tipus. Segons el que acabem de dir, el límit és

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}-1\right)\cdot n^2}.$$

Calculem separadament el límit de l'exponent:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}-1\right)\cdot n^2=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1-n^2+1}{n^2-1}\right)\cdot n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2-1}=2.$$

Per tant, el resultat final és e^2.

Exercici 6 *Calculeu:* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$.

2. Funcions

2.1. Límits de funcions. Límits laterals

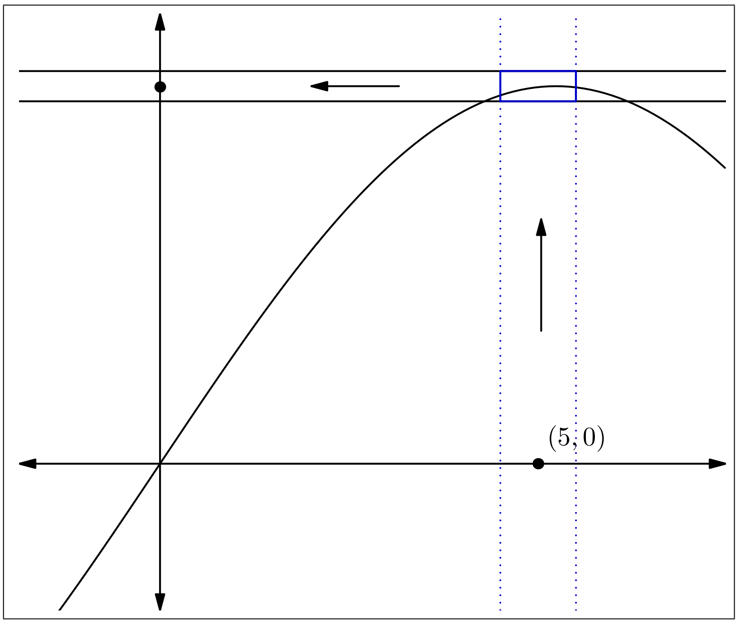
Ara, en lloc de successions de nombres treballarem amb funcions i ens preguntarem quin és el límit d'una funció f quan la variable x tendeix a un valor determinat a. Ara no és necessari que aquest valor sigui infinit, pot ser qualsevol nombre real o fins i tot menys infinit.

Direm que el límit és A quan els valors propers a a tenen la seva imatge per a f molt propera a A. O sigui que quan x s'acosta a a, aleshores $f(x)$ s'acosta a A. Posem:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Una manera una mica més precisa de dir-ho està representada en la figura 2: agafem una banda horitzontal al voltant del punt $(0,A)$ tan prima com vulguem. Aleshores hi ha d'haver un interval centrat en a (en la figura a és 5) de manera que el tros de gràfica sobre aquest interval (és el tros de gràfica que es troba entre les dues línies intermitents verticals) cau tot dins la banda horitzontal.

Figura 2. Definició del límit d'una funció en un punt



En la figura hem suposat que A és un nombre real. En el cas $A = \infty$ dibuixaríem una línia horitzontal $y = M$ i hauria de passar que, per molt gran que fos M

en un interval convenient centrat en a, la gràfica estigués per sobre d'aquesta recta. Si és $A = -\infty$ demanarem que per a un $-M$ molt negatiu sempre hi hagi un interval de manera que en ell la gràfica estigui per sota de la recta horitzontal $y = -M$.

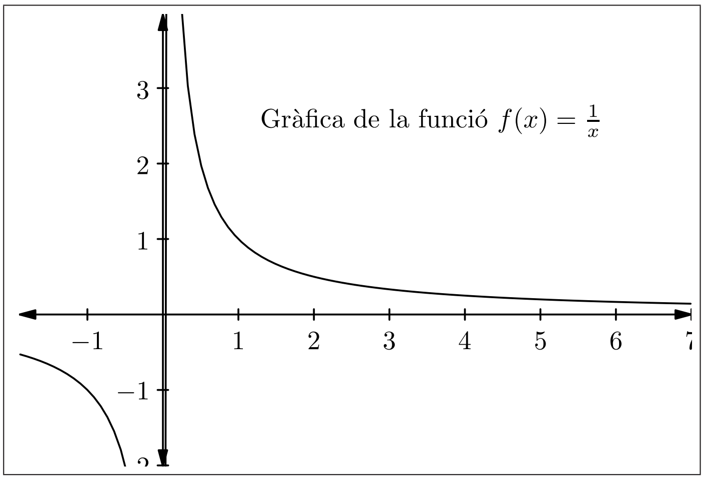
El punt a pot ser, en principi, un nombre real o $\pm\infty$. Però quan analitzem funcions concretes ens adonem que no pot ser qualsevol. Per exemple, no té cap sentit fer el límit de la funció logaritme neperià $f(x) = \ln(x)$ quan x s'acosta a -1 perquè el domini del logaritme és $(0,\infty)$ i no podem calcular la funció en valors propers a -1. Això vol dir que a ha de ser del domini? No necessàriament, però ha de ser un punt "abastable" des del domini.

El 0 no és del domini del logaritme però podem fer que x s'acosti a zero tant com vulguem agafant $x > 0$; com que no podem agafar un interval centrat en x (no ens podem acostar per l'esquerra), no podem aplicar la nostra definició representada en la figura 2 i per tant no hi hauria límit. En canvi, per a la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ no tenim aquest problema. Tot i que el 0 no és del domini $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ens hi podem acostar per les dues bandes. Per tant, aquí sí podem considerar el límit quan x tendeix a zero. Quan ens hi acostem amb valors positius, el quocient es fa molt gran i semblaria que el límit és infinit, però quan ens hi acostem per l'esquerra els valors se'n van cap a menys infinit. Per tant el límit no existeix.

Punt "abastable"

Informalment, un punt "abastable" des del domini compleix que sempre hi ha punts del domini tan a prop com vulguem del punt.

Figura 3



Aquests dos exemples ens motiven a considerar els anomenats **límits laterals**, que consisteixen a acostar-nos a a només per una de les dues bandes. Si ho fem per la dreta posem

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

i si ho fem per l'esquerra posem

$$\lim_{x\to a^-} f(x).$$

En les dues funcions considerades prèviament tindrem que en el logaritme només es pot fer el límit lateral per la dreta, i com que el logaritme dels nombres propers a zero són cada vegada més negatius tindrem:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

En el cas de la funció $\frac{1}{x}$, els dos límits laterals existeixen però són diferents:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

El límit existeix (per a a un nombre real) quan els dos límits laterals existeixen i coindeixen. Per exemple:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Òbviament no té sentit fer els límits laterals quan $a = \pm\infty$.

2.2. Indeterminacions de límits de funcions. Regles i criteris

Com en el cas de les successions, disposem d'una bona relació entre els límits i les operacions bàsiques de suma, resta, producte, divisió i potència. Pràcticament podem repetir la llista de propietats que teníem per als límits de successions canviant n per x, A_n per $f(x)$, etc. Suposem doncs que dues funcions f,g tenen límits A,B respectivament quan x tendeix a a i tindrem que (tots els límits es consideren quan x tendeix a a), és a dir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Aleshores:

1) El límit de la funció $f(x)+g(x)$ és $A+B$, i el de la diferència $f(x)-g(x)$ és $A-B$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B.$$

2) El límit de la funció producte $f(x)\cdot g(x)$ és $A\cdot B$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B.$$

3) Suposem que $g(x)$ no és zero en els valors propers a a (però no s'exclou que $g(x)$ valgui 0 en algun punt), aleshores el límit de la funció quocient $\frac{f(x)}{g(x)}$ és $\frac{A}{B}$:

Observació

En general, i tret d'excepcions, si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} g(x) = B$:

- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$
- $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B$
- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$
- $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

4) Suposem que $f(x) > 0$ al voltant d'a i que $A > 0$, aleshores el límit de la funció $f(x)^{g(x)}$ és A^B:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = A^B.$$

Novament les afirmacions anteriors tenen excepcions segons els valors dels límits A i B. Per exemple, en la propietat 1 podem tenim $A = \infty$ i $B = -\infty$, amb la qual cosa el límit de $f(x) + g(x)$ és una indeterminació del tipus $\infty - \infty$. Aquestes indeterminacions, com ja hem explicat, s'han de considerar cas a cas i el resultat dependrà de les funcions concretes f i g que tinguem, és a dir, "indeterminat" no vol dir que no es pugui calcular sinó que aplicant les regles anteriors no trobem un valor. En molts casos del tipus $\infty - \infty$, el mètode de "multiplicar per la suma" ens dóna la solució.

Nota

Si el resultat de les operacions dels límits és $A + B = \infty - \infty$, $A \cdot B = 0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{A}{B} = \frac{0}{0}$, $\frac{A}{B} = \pm\frac{\infty}{\infty}$, $A^B = 1^{\pm\infty}$, ens trobem davant d'una indeterminació, que es resol manipulant les funcions del límit.

Exercici 7 *Calculeu* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right)$.

Recordeu que al subapartat 1.2.2. s'explica com es transforma una indeterminació del tipus $0 \cdot \infty$ o $\frac{0}{0}$ en una de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Per tant només ens ocuparem de resoldre'n d'aquest darrer tipus. Si les dues funcions són polinomis i $a = \infty$, la mateixa recepta que hem explicat per a les successions funciona per a les funcions canviant n per x. Si $a = -\infty$ tot és igual llevat que si $r > s$ i $r-s$ és senar aleshores s'ha de canviar el signe del resultat. Finalment, si a és un nombre real només tenim indeterminació (del tipus $\frac{0}{0}$) quan a és alhora arrel de f i de g. En aquesta situació podem eliminar la indeterminació factoritzant els polinomis i simplificant el quocient.

Exercici 8 *Calculeu* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

2.2.1. Regla de L'Hôpital

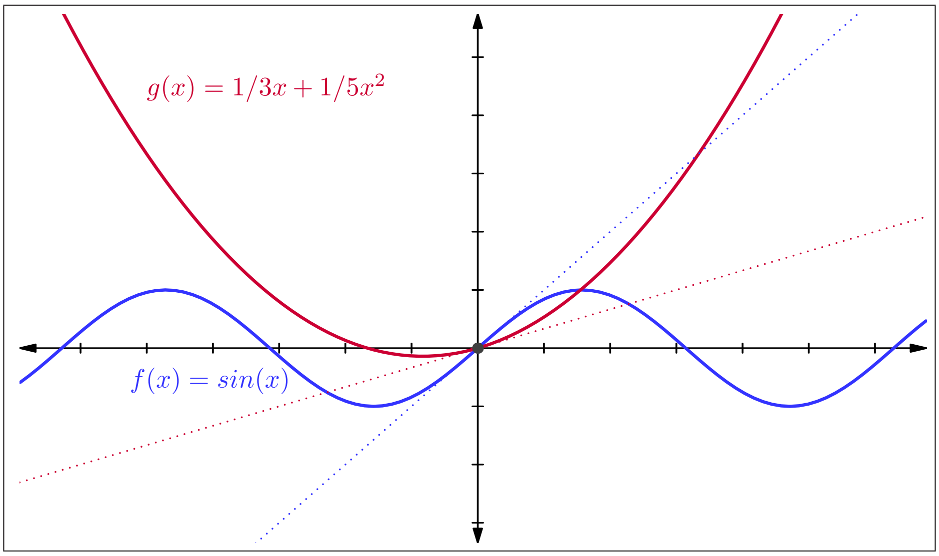
Per al cas de les indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$ de funcions f i g (incloses les polinòmiques) qualssevol disposem d'una eina de càlcul molt potent anomenada la regla de L'Hôpital. Suposem que volem calcular el límit d'un quocient de funcions f i g quan x tendeix a 0 sabent que totes dues hi tendeixen:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x), \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}?$$

Mirem els gràfics de les dues funcions (suposem que totes dues són funcions que tendeixen a 0 sense ser tangents a l'eix de les y's) i comparem com s'aproximen les dues funcions al zero. Per fer-ho mirem amb quina inclinació (pendent de la recta tangent a la funció en 0) ho fan. Suposem que el pendent de la recta tangent a f en 0 sigui s i que el de g sigui t. Aleshores:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta g} = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta f/\Delta x}{\Delta g/\Delta x} = \frac{s}{t}.$$

Figura 4. Dues funcions i les seves tangents en l'origen



Aquesta és la coneguda regla de L'Hôpital que ens permetrà resoldre moltes indeterminacions quan sapiguem com fer el càlcul del pendent de la tangent a una funció en un punt. En un tema posterior veurem que el pendent de la recta tangent a f en un punt a és la derivada $f'(a)$ de la funció en el punt a.

En termes de les funcions derivades tenim que si el límit quan x tendeix a a de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existeix, aleshores

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Aquesta igualtat val per a les indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$ i del tipus $\frac{\infty}{\infty}$, tant si a és un nombre real com si $a = \pm\infty$.

Per exemple, sabent que la derivada del sinus és el cosinus i que la derivada de x és la constant 1 tenim que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

No sempre podrem utilitzar aquesta regla, ja que algunes funcions s'acosten a zero apropant-se a l'eix de les y's, un exemple és la funció $f(x) = \sqrt{x}$. Aquesta funció té pendent infinit en $x = 0$.

Exercici 9 *Calculeu* $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$.

2.2.2. Indeterminació 1^∞

El darrer tipus d'indeterminació que ens manca per considerar és el que hem anomenat 1^∞, és a dir, volem fer el límit d'una funció que tendeix a 1 elevada a un exponent que tendeix a infinit. El mètode utilitzat per les successions és perfectament vàlid per al cas de funcions. Amb un petit canvi en les notacions tindrem que si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions amb

$$\lim_{x\to a} f(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

aleshores

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}.$$

Usant aquesta fórmula podem calcular el límit següent:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}-1\right)\cdot\frac{1}{x-1}}.$$

Operem ara en l'exponent (no perdem de vista que estem fent límit quan x tendeix a 1) i obtenim:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}-1\right)\cdot\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1-x^2-1}{(x^2+1)(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(x^2+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}.$$

Per tant, el límit és $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2.2.3. Criteri "funció fitada per funció que tendeix a zero"

Un resultat que és d'utilitat en el càlcul de límits és el següent.

Si tenim dues funcions f i g de manera que f tendeix a 0 en un punt a i g és una funció fitada (o sigui, hi ha un nombre M de manera que $-M \leq g(x) \leq M$ en els punts d'un interval que contingui el punt a), aleshores

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Això és degut al fet que la funció $f \cdot g$ queda "encaixada" entre les funcions $-M \cdot f$ i $M \cdot f$ que tendeixen a zero.

Aquest resultat és especialment útil quan intervenen les funcions $\sin(x)$ i $\cos(x)$. Les dues són funcions fitades:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

Per tant, aplicant el criteri, tindrem que

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

o també que

$$\lim_{x\to 1} (e^x - e) \cdot \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0.$$

2.3. Funcions contínues

La noció de límit permet donar una definició precisa de la idea de continuïtat. Intuïtivament, la funció és contínua en a quan es pot dibuixar la gràfica de la funció sense aixecar el llapis del paper en apropar-nos a $x = a$. Això vol dir que $f(x)$ s'aproxima a $f(a)$ quan x tendeix a a.

O sigui, f és contínua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Quan simplement diem que una funció és contínua (ometent el punt a) volem dir que la funció és contínua en tots els punts del seu domini.

Les funcions següents són contínues:

- Totes les funcions polinòmiques,
- les funcions trigonomètriques $\sin(x)$ i $\cos(x)$,
- les funcions exponencials a^x i logarítmiques $\log_a(x)$ (amb $a > 0$); en particular les més usuals e^x i $\ln(x)$.

Funcions contínues

Són contínues les funcions elementals: polinòmiques, trigonomètriques, exponencials i logarítmiques.

Combinarem aquestes funcions amb les propietats següents:

- La suma de dues funcions contínues és una funció contínua.
- El producte de dues funcions contínues és una funció contínua.
- La composició de dues funcions contínues és una funció contínua.

Nota

Són contínues la suma, multiplicació i composició de funcions contínues. Si no s'anul·la el denominador, també el quocient és continu.

Recordem que compondre funcions vol dir "fer-ne una després de l'altra". Per exemple $e^{\sin(x)}$ és la composició de la funció sinus (la que apliquem primer a la x) amb la funció exponencial. De resultes de l'anterior, aquesta funció és contínua. També ho seran $\ln(x) + \sin(x)$ (suma de dues funcions contínues), $(x^2+1)\cdot\cos(x)$ (producte de dues funcions contínues), $\sin(x^3+2x-1)$ (composició d'una funció polinòmica amb la funció sinus), etc.

No hem esmentat el cas del quocient de funcions perquè, en els punts en què s'anul·li la funció del denominador, la funció no serà contínua. De fet seran punts que deixaran d'estar en el domini. És el cas de la funció tangent $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en què els valors $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ anul·len el cosinus i no estan en el domini. El que sí sabem és el següent:

- El quocient de dues funcions contínues és continu en tots els punts en què no s'anul·la el denominador.

Exercici 10 *Digueu on són contínues la funció tangent i la funció* $\frac{1}{x^2-1}$.

2.3.1. Tipus de discontinuïtat

Quan una funció no és contínua en un punt "abastable" diem que té una **discontinuïtat**. Però no totes les discontinuïtats són iguals, segons el comportament de la gràfica en distingim tres casos:

1) Discontinuïtat **evitable**: és el cas en què el límit de la funció f en el punt a existeix però o bé a no és del domini o bé el límit no coincideix amb $f(a)$. Es diu evitable perquè afegint el punt al domini o modificant la funció la podem convertir en una funció contínua.

Discontinuïtats

Les discontinuïtats poden ser evitables, de salt i asimptòtiques.

2) Discontinuïtat **de salt**: correspon a la situació en què els límits laterals de f en a existeixen i són finits, però són diferents.

3) Discontinuïtat **asimptòtica**: en direm així quan almenys un dels límits laterals sigui infinit.

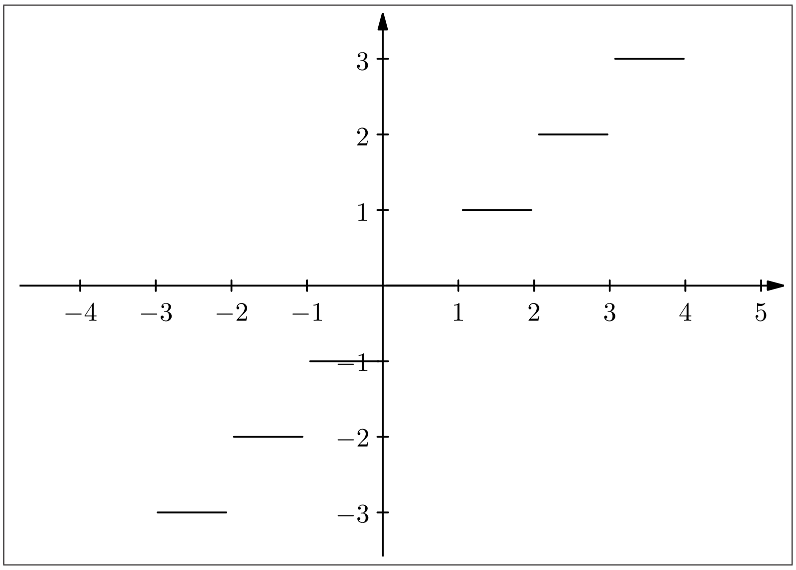
Vegem a continuació uns quants exemples. La funció definida a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

té una discontinuïtat evitable en el punt $a = 1$, ja que el límit de f quan x tendeix a 1 existeix i és 1 i, en canvi, $f(1) = 2$. També la funció $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}$ té una discontinuïtat evitable en $a = -1$. En aquest cas, el punt no és del domini. Aquesta funció coincideix amb la funció $x - 1$ a $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, per tant podem "simplificar $x + 1$" i canviar la funció f per la funció $x - 1$. D'aquesta manera, la funció s'estén contínuament al punt –1.

Considerem la funció "part entera", és a dir, la funció que associa a cada nombre real l'enter inferior més proper. La denotem per $E(x)$. Per exemple $E(1{,}5) = 1$, $E(18{,}345) = 18$, $E(e) = 2$, $E(\pi) = 3$, etc. O sigui, per als nombres positius simplement trunquem eliminant la part decimal, però alerta amb els negatius: $E(-0{,}23) = -1$ i $E(-23{,}345...) = -24$, ja que estem agafant l'enter **inferior** més proper. Amb aquesta definició resulta clar que el límit lateral per la dreta en el 0 és 0 mentre que el límit lateral per l'esquerra és –1. Passa el mateix en tots els nombres enters. Són discontinuïtats de salt.

Figura 5. Gràfica de la funció part entera



Exercici 11 *Digueu quin tipus de discontinuïtat té la funció* $\frac{1}{x}$ *en el punt* 0.

2.3.2. Asímptotes

Sens dubte les funcions més senzilles d'entendre són les rectes, o sigui les funcions de la forma $f(x) = ax + b$, en particular, si $a = 0$ tenim les funcions constants representades per rectes horitzontals. Observem que les rectes verticals $x = a$ no les podem veure com una funció.

Quan estudiem una funció, ens pot ajudar a entendre com és la seva gràfica saber si hi ha alguna recta que s'hi acosta tant com vulguem, bé sigui quan x s'acosta a un punt que no és del domini o bé quan x va cap $\pm\infty$.

Una **asímptota vertical** de f és una recta vertical $x = a$, en què a no és del domini de f i tal que almenys un dels límits laterals de f en a sigui $\pm\infty$. Per exemple $x = 0$ és una asímptota vertical per a les funcions $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\ln(x)$,...

Una **asímptota horitzontal** és una recta de la forma $y = b$ que s'acosta a f quan x tendeix a infinit o menys infinit. Dit d'una altra manera, quan

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Per ser més precisos, en aquest cas diríem que és una asímptota horitzontal "per la dreta". Si el límit quan x tendeix a $-\infty$ és constant c diem que $y = c$ és una asímptota horitzontal "per l'esquerra". Pot passar que n'hi hagi per la dreta i no per l'esquerra o al revés, per tant els càlculs s'han de fer independentment. Per exemple $x = 0$ és una asímptota horitzontal per l'esquerra de $f(x) = e^x$, i f no en té per la dreta. La situació és la contrària per a e^{-x}. Si una funció no té asímptota horitzontal (si en té no cal fer res del que direm a continuació) podem mirar si s'acosta a una recta de la forma $y = ax + b$ amb $a \neq 0$. Si és el cas, diem que aquesta recta és una **asímptota obliqua** de la funció. Com abans, això es pot fer per la dreta o per l'esquerra tot i que ara, per fixar idees, només ho farem per la dreta. El mètode de càlcul és el següent: primer trobem el pendent a de l'asímptota fent:

Asímptotes

Les asímptotes poden ser horitzontals, verticals o obliqües.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

I després calculem el terme independent b calculant el límit següent:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Si un dels dos límits no existeix, voldrà dir que no hi ha asímptota obliqua. Per exemple la funció $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ no té asímptota horitzontal per la dreta (ni per l'esquerra), però en canvi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = 1$$

i

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Per tant, $y = x$ és l'asímptota obliqua per la dreta de la funció f.

Exercici 12 *Comproveu que la funció* $\frac{x^2+x+1}{x}$ *té asímptotes obliqües per la dreta i per l'esquerra i calculeu-les.*

Solucions als exercicis

1) 0, ∞, $-\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n+B_n)=5$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n-B_n)=5$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n\cdot B_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n)^{B_n}=1$.

3) 0, $\frac{2}{3}$, ∞, 0.

4) 0.

5) $\frac{1}{3}$, 0, ∞, $-\infty$.

6) e^3.

7) 0.

8) $\frac{-1}{2}$.

9) 1.

10) $\mathbb{R}\backslash\{\ldots,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots\}$, $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

11) Asimptòtica.

12) Tant l'asímptota per l'esquerra com per la dreta és $y=x+1$.

Bibliografia

Aguiló, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1994). *Temes clau de càlcul*. Edicions de la UPC. Servei de publicacions. Barcelona, Espanya

Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias*. Pearson. Madrid, Espanya.

Perelló, C. (1994). *Càlcul Infinitesimal. Amb mètodes numèrics i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana. Barcelona, Espanya

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2013). *Matemáticas para la ingeniería*. Pearson. Madrid, Espanya.