Integració impròpia

Albert Gras i Martí
Teresa Sancho Vinuesa

PID_00183882

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Sobre aquests materials de treball

Hem vist el significat de les integrals definides i com es poden avaluar. De vegades, la funció que cal integrar o els límits d'integració presenten valors no definits que cal tractar de manera particular.

Recordarem, en primer lloc, el significat geomètric de la integral definida. A continuació, veurem els diferents casos d'integrals impròpies que es poden presentar i com abordar-les.

1. La integral definida com una àrea

Hem vist com calcular una àrea delimitada entre dos punts per l'eix d'abscisses i hem vist una corba $f(x)$ (figura 1) com una integral definida:

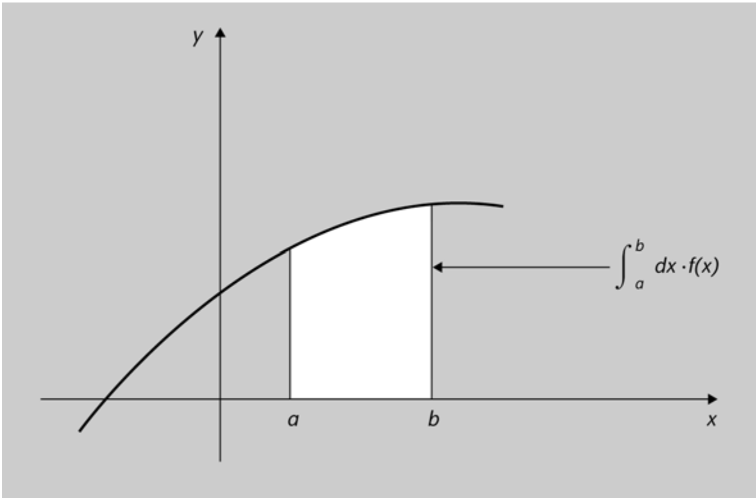


Figura 1: Integral definida i àrea.

Recordem que només podem aplicar el teorema fonamental del càlcul per calcular la integral definida a partir de la primitiva calculada en els extrems de l'interval d'integració si la funció és contínua en l'interval en què es vol aplicar.

A1

Escriviu exemples de funcions que presentin una discontinuïtat en un punt de l'interval (0, 1), o bé perquè la funció fa un salt, o bé perquè la funció divergeix en algun punt de l'interval.

Com calcularem la integral d'una funció que presenta discontinuïtats?

Què passa si la funció no és contínua en algun punt?

Hem vist en l'activitat A1 que hi ha diferents tipus de discontinuïtats i que el tractament és diferent en cada cas.

a) Discontinuïtat evitable

Si la discontinuïtat és evitable, no hi ha cap problema. Passa això, per exemple, en una funció definida de manera que està definida per a qualsevol valor real excepte per a un punt:

$$f(x) = 2 \qquad x \neq 1 \tag{1}$$

En la figura 2 representem aquesta funció. La funció no està definida a $x = 1$.

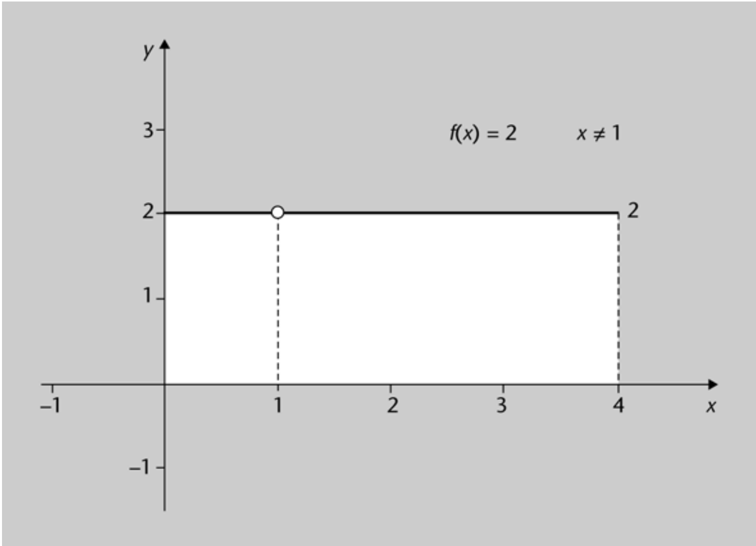


Figura 2: Representació gràfica de la funció definida per l'equació (1).

Aquesta funció és constant i val 2 en qualsevol punt excepte a $x = 1$. En aquest cas, la integral definida és senzilla. Per exemple, l'àrea sota la corba entre $x = 0$ i $x = 4$ val el següent:

$$f(x) = \int_0^4 2 \ \mathrm{d}x = 2x\Big|_0^4 = 8$$

Encara que l'interval d'integració inclou el punt $x = 1$, en què la funció és discontínua, calculem la integral ignorant la discontinuïtat. El procediment té una interpretació gràfica senzilla, com ara discutirem.

A2

Expliqueu gràficament l'afirmació anterior: "Encara que l'interval d'integració inclou el punt en què la funció és discontínua, calculem la integral ignorant la discontinuïtat".

b) Discontinuïtat de salt

Si la discontinuïtat és del tipus de salt, com en la figura 3, només hem de fer la suma de dues integrals definides en cada interval en què la funció sí és contínua.

Per exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases} \qquad (2)$$

Aquesta funció es representa en la figura 3. La funció pren un valor des de l'origen fins al punt 1 i pren un altre valor des del punt 1 (que en queda exclòs) fins al punt 2.

L'àrea sota la funció entre $x = 0$ i $x = 2$ és, doncs, la següent:

$$A = \int_0^2 f(x) \ \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \ \mathrm{d}x + \int_1^2 f(x) \ \mathrm{d}x = \int_0^1 1 \ \mathrm{d}x + \int_1^2 2 \ \mathrm{d}x = x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = 3$$

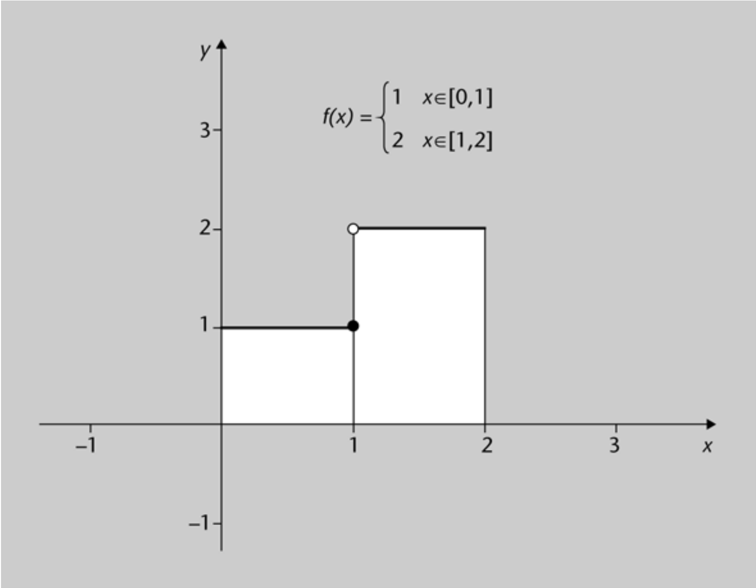


Figura 3: Representació gràfica de la funció definida en l'equació (2).

c) Discontinuïtat asimptòtica

Si la discontinuïtat és asimptòtica, només es pot fer un càlcul aproximat o un pas al límit. Per exemple, la funció següent:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

divergeix a $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

per tant, no podem calcular directament la integral definida a (0, 1]:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

perquè la funció en l'integrand no és contínua a $x = 0$.

A3

Calculeu les integrals següents:

a) $\int_{0.5}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{0.1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_{0.01}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_{0.001}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

Què observeu?

Com acabem de veure, si calculem diverses integrals definides amb el límit inferior cada vegada més proper a 0, ens apropem més al valor 1.5.

Per tant, podem definir el valor de la integral definida (3) com el valor del límit de les integrals definides amb un límit inferior que tendeix a 0:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Recopilem els diversos casos que es poden donar.

2. Definició d'integral impròpia amb discontinuïtats asimptòtiques

Si la funció té discontinuïtats asimptòtiques, hi pot haver tres casos, segons la localització del punt de discontinuïtat en relació amb l'interval d'integració.

1) Discontinuïtat en l'extrem inferior de l'interval

Si una funció f és contínua a (a, b) i presenta una discontinuïtat asimptòtica a a, definim el següent:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M \to a^+} \int_M^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si el límit existeix i és finit, diem que la integral impròpia és convergent. En cas contrari, diem que és divergent.

2) Discontinuïtat en l'extrem superior de l'interval

Si una funció f és contínua a (a, b) i presenta una discontinuïtat asimptòtica a b:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si el límit existeix i és finit, diem que la integral impròpia és convergent. En cas contrari, diem que és divergent.

3) Discontinuïtat asimptòtica dins de l'interval

Si una funció f és contínua a $[a, b]$ i presenta una discontinuïtat asimptòtica en algun punt c de l'interval (a, b), la separem en dues integrals:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

I ara tractem cada integral com en els casos 1) o 2) anteriors.

Si alguna de les dues integrals impròpies de la dreta divergeix, aleshores diem que la integral impròpia de l'esquerra divergeix.

Exemples

Posem-ho en pràctica. Suposem que volem calcular la integral definida següent:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Com que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, la funció $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ presenta una discontinuïtat asimptòtica i, per tant, la integral que volem calcular és impròpia.

A4

Apliqueu la definició corresponent (cas 1) i calculeu aquesta integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Vegem-ne altres casos.

A5

Calculeu les integrals impròpies següents:

a) $\int_0^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

I si l'interval d'integració és infinit?

Però què passa si volem calcular l'àrea delimitada per l'eix d'abscisses i una corba $f(x)$ en un interval de longitud infinita? Per exemple:

$$\int_{-\infty}^3 f(x)$$

Veiem que aquest cas pot conduir a situacions curioses.

2.1. La trompeta de Gabriel

La trompeta de Gabriel, també denominada *trompeta de Torricelli*, és una figura ideada per Evangelista Torricelli, conegut per haver inventat, entre altres instruments, el baròmetre.

La trompeta de Gabriel és el sòlid de revolució generat per la regió no fitada delimitada per la corba de la figura 4a, anomenada *hipèrbola*:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{4}$$

i la semirecta $x \geq 1$. És un sòlid, doncs, infinitament llarg.

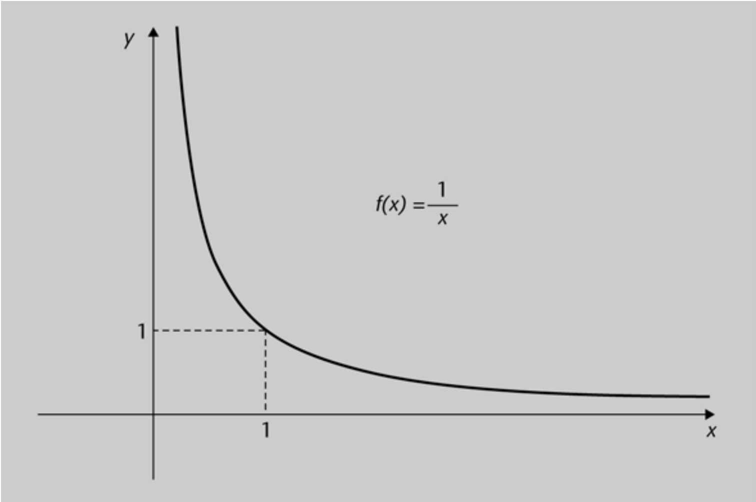


Figura 4a: Hipèrbola (funció $y(x) = 1/x$).

La figura 4b mostra com es genera la trompeta de Gabriel per revolució de la corba de la figura 4a entorn de l'eix X:

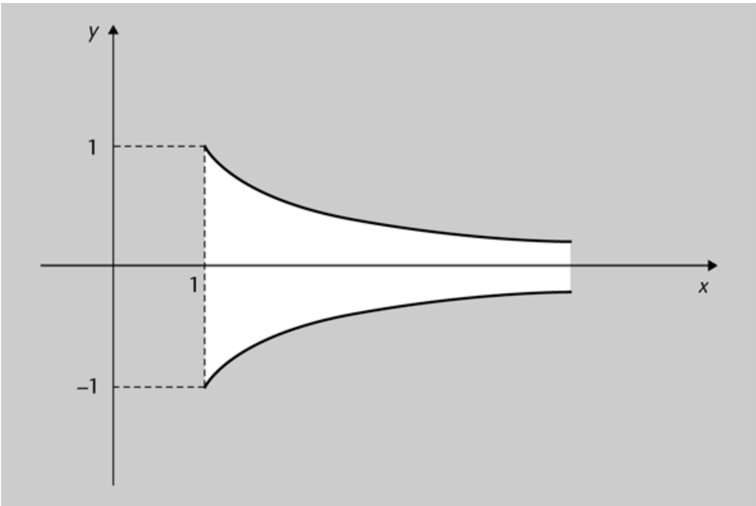


Figura 4b: Generació de la trompeta de Gabriel per rotació.

I en la figura 4c mostrem una vista de perfil de la trompeta.

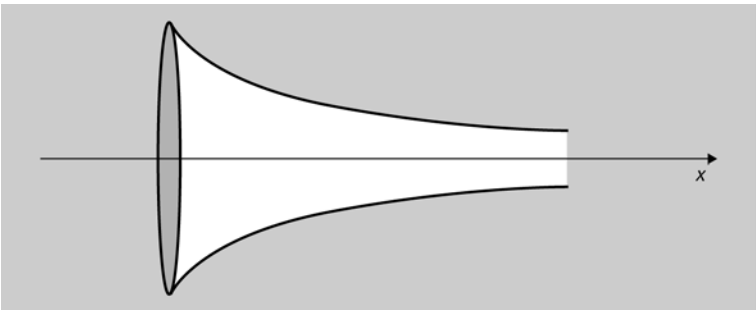


Figura 4c: Vista de perfil de la trompeta de Gabriel.

Volem calcular el volum de la trompeta de Gabriel. En primer lloc, veurem com es calcula el volum en cas que considerem que la trompeta és finita (és a dir, tallem l'eix X, per exemple, a $x = 2$).

Es tracta d'un sòlid de revolució. És a dir, la regió del pla delimitada per la funció $y(x) = 1/x$ gira entorn de l'eix d'abscisses (eix de revolució o de gir). El volum d'una secció perpendicular a aquest eix per un punt x, de gruix Δx, és un disc d'altura Δx i de radi $f(x) = 1/x$ (figura 5). L'àrea del disc és igual a p vegades el seu radi al quadrat i el volum del disc és l'àrea de la base per l'altura:

$$\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 \Delta x$$

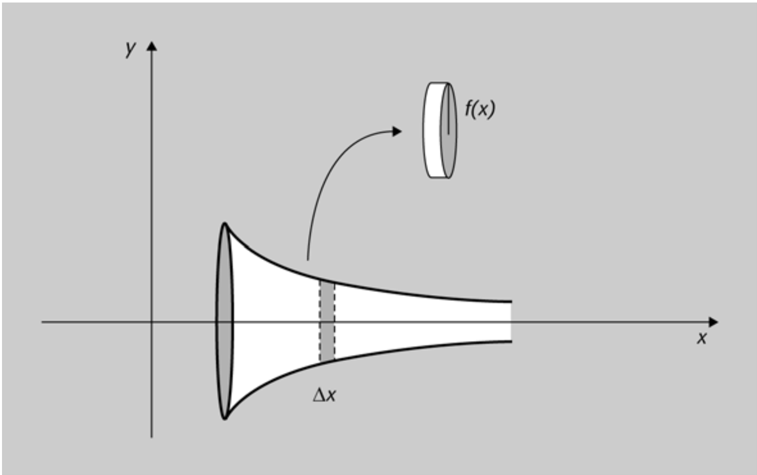


Figura 5: Disc elemental en què hem dividit el volum de la trompeta de Gabriel.

Si aproximem el volum del sòlid per la suma de n volums consecutius d'aquestes seccions "gruixudes", tenim el següent:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\frac{1}{x_i}\right)^2 \Delta x$$

Como ja hem comentat quan s'ha estudiat la integral definida, aquesta aproximació cada vegada és millor si fem que les seccions cada vegada siguin més primes o, el mateix, si fem que $n \to +\infty$. Així, podem definir el volum del sòlid de revolució de la manera següent:

$$V = \lim_{n\to+\infty,\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\frac{1}{x_i}\right)^2 \Delta x = \pi\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

en què hem convertit el sumatori de termes infinits en una integral que comprèn l'interval d'integració, del punt $x = 1$ al punt $x = 2$ i $\Delta x = \mathrm{d}x$.

Ara ja podem calcular el volum de la trompeta completa.

A6

Com calcularies el volum de la trompeta de Gabriel a partir d'una integral definida?

En l'activitat anterior hem comprovat que el volum de la trompeta de Gabriel és finit i val π.

3. Definició d'integral impròpia amb límits d'integració infinits

Segons hem vist, podem donar una definició d'integral impròpia quan alguns dels límits d'integració són infinits. Es poden donar tres casos.

1) Interval d'integració infinit per l'extrem superior

Si una funció f és contínua en $[a, +\infty[$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si el límit existeix i és finit, diem que la integral impròpia és convergent. En cas contrari, diem que és divergent.

2) Interval d'integració infinit per l'extrem inferior

Si una funció f és contínua en $]-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M \to -\infty} \int_M^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si el límit existeix i és finit, diem que la integral impròpia és convergent. En cas contrari, diem que és divergent.

3) Interval d'integració infinit pels dos extrems

Si una funció f és contínua en tota la recta real (tot l'eix X) $[-\infty, +\infty]$ i a és qualsevol nombre real:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si les dues integrals impròpies de la dreta convergeixen, aleshores diem que la integral impròpia de l'esquerra és convergent. En cas contrari, diem que és divergent.

Fem un exercici: calculem l'àrea delimitada per dues funcions.

A7

Les funcions són les següents:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a) Elaboreu un esquema de les dues funcions f i g i comproveu que és correcte amb la Wiris.

b) En quants punts es tallen les funcions? Calculeu analíticament (a mà i amb la Wiris) els punts en què es tallen les dues funcions.

c) Marqueu en la gràfica (sense calcular-la) l'àrea delimitada per les dues funcions en el primer quadrant.

Com que ja hem determinat l'àrea que delimiten les dues funcions, la podem calcular.

A8

Calculeu l'àrea delimitada per les dues funcions de l'activitat anterior, A7.

Així doncs, l'àrea que buscàvem és infinita. Aquest resultat us pot semblar sorprenent si us fixeu en la forma de l'àrea (figura 3s).

Fem més exercicis.

A9

Calculeu les integrals impròpies següents:

a) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$

b) $\int_1^{+\infty} (1-x)\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$

A continuació farem un exercici per trobar el valor d'un paràmetre.

A10

Calculeu per a quins valors de k la integral impròpia següent val 1:

$$\int_0^{+\infty} k^2 \, \mathrm{e}^{-kx} \, \mathrm{d}x$$

I, finalment, us proposem un exercici semblant a l'anterior.

A11

Per a quins valors de k convergeix la integral impròpia $\int_1^{\infty} \frac{k}{x^3} \, \mathrm{d}x$?

Calculeu el valor que ha de tenir k perquè la integral valgui 1.

3.1. Àrea lateral de la trompeta de Gabriel

Ara tornem a la trompeta de Gabriel. Quanta pintura necessitaríem per tal de pintar-ne l'interior? Ho podem saber a partir de la seva àrea lateral. Calculem-la.

Suposem una figura de revolució de forma a partir de la funció $f(x)$, que té derivada contínua en l'interval $[a, b]$ quan la fem girar entorn d'un eix vertical o horitzontal. Es pot demostrar que la superfície de revolució resultant es pot calcular mitjançant la integral següent:

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ \mathrm{d}x$$

en què $r(x)$ denota la distància entre la corba i l'eix de revolució.

En el cas de la trompeta de Gabriel, l'interval és la semirecta $[1, +\infty[$ i la distància a l'eix de revolució és directament $f(x)$. Així:

$$S = 2\pi \int_1^{+\infty} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\ \mathrm{d}x$$

Si calculéssim la integral anterior, veuríem que és divergent. Podem practicar un raonament matemàtic alternatiu: en lloc de calcular directament la integral, n'estudiarem la convergència.

Com que passa això:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$$

vol dir que:

$$\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > \frac{1}{x}$$

A12

Calculeu la integral impròpia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$.

Com que l'àrea delimitada per $\frac{1}{x}$ en l'interval $[1, +\infty[$ és infinita, tal com hem vist en l'activitat A12, podem assegurar que una àrea més gran també ho serà. Per tant, la integral impròpia:

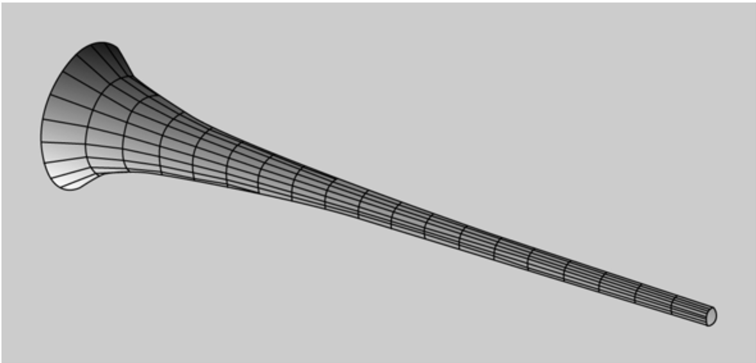
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\ \mathrm{d}x$$

és divergent i l'àrea lateral de la trompeta de Gabriel és infinita.

A13

Aquest resultat ens porta a pensar que mai tindrem prou pintura per a pintar l'interior de la trompeta de Gabriel.

No obstant això, en l'activitat A6 hem vist que el volum de la trompeta de Gabriel és finit i val π. Hi hauria alguna manera de pintar-la?



Recapitulació final: què hem après en aquest mòdul?

A14

Recapitulació:

– En quins casos una integral definida és impròpia?

– Representeu gràficament cada una de les situacions.

Resolució d'activitats

A1

Per exemple, la funció

$f(x) = 2$ si $0 \le x < 0.5$
$f(x) = 4$ si $0.5 \le x \le 2$

que representem en la figura 1s.

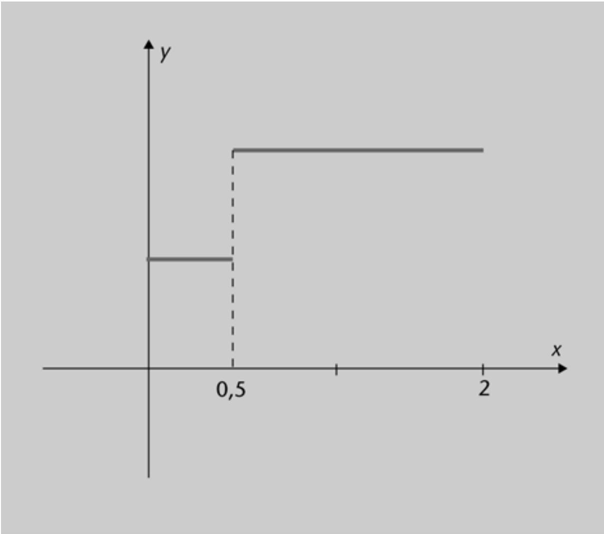


Figura 1s. Representació gràfica de $f(x)$

Un altre exemple:

$$g(x) = \frac{1}{x - 0.5}$$

que representem en la figura 2s.

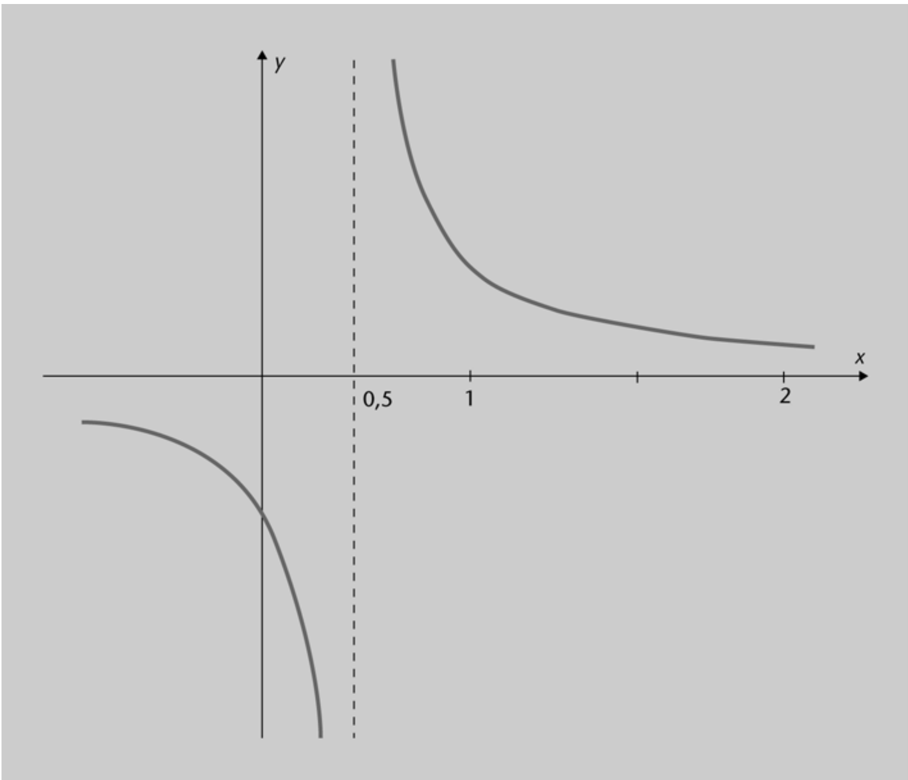


Figura 2s. Representació gràfica de $g(x)$

En el cas de la figura 1s, el càlcul de l'àrea és trivial: l'àrea total és la suma de l'àrea dels dos rectangles descrits per $0 \le x \le 0.5$, i $0.5 \le x \le 1$.

En el segon exemple, serà finita l'àrea que hi ha sota la funció entre 0 i 0.5, per exemple? S'anul·larà la suma de l'àrea compresa entre 0 i 0.5 amb l'àrea compresa entre 0.5 i 1? (recordeu que l'àrea sota la funció entre 0 i 0.5 és negativa, i entre 0.5 i 1 és positiva. Podria ocórrer que fossin iguals en valor absolut).

A2

L'àrea sota la funció definida en un interval d'amplada nul·la localitzat en el punt $x = 1$ és una àrea nul·la i, per tant, no contribueix al valor de la integral.

Per tant, si una funció és contínua i delimitada en un interval excepte en un nombre finit de punts de discontinuïtat en el mateix interval, en podem efectuar la integració sense tenir-los en compte.

A3

Una primitiva de la funció

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

és la funció

$$F(x) = \frac{x^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$

Per tant:

a) $F(1) - F(0.5) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{0.5^2} = 0.555059$

b) $F(1) - F(0.1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{0.1^2} = 1.176835$

c) $F(1) - F(0.01) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{0.01^2} = 1.430376$

d) $F(1) - F(0.001) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{0.001^2} = 1.485$

Els valors de la integral sembla que convergeixen a 1.5.

A4

Apliquem, doncs, la definició:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{M\to 0^+}\int_M^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{M\to 0^+} \left.\frac{x^{2/3}}{2/3}\right|_M^1 = \lim_{M\to 0^+}\frac{3}{2}(1 - M^{2/3}) = \frac{3}{2}$$

A5

a) Es tracta del primer cas; la funció és discontínua en l'extrem inferior de l'interval d'integració:

$$\int_0^2 \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to 0} \ln x\Big|_M^2 = \lim_{M\to 0}(\ln 2 - \ln M) = +\infty$$

Aquesta integral definida és divergent: l'àrea buscada té un valor infinit.

b) La funció té una discontinuïtat en $x = 0$:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

Es tracta del tercer cas i, per tant, fem:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

Les dues integrals anteriors són divergents. Per tant, la integral proposada és divergent.

A6

L'objectiu és determinar el volum de la trompeta en cas que la regió no sigui delimitada:

$$\pi\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Si calculem:

$$V_1 = \pi \int_1^{1000} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$V_2 = \pi \int_1^{100000} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$V_3 = \pi \int_1^{10^{20}} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

observarem que, a mesura que augmentem l'extrem superior de la integral, cada vegada ens aproximem més a π. Per exemple,

$$V_2 = \pi \int_1^{100\,000} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\left(-\frac{1}{x}\right)_1^{100\,000} = \pi\left(1-\frac{1}{100\,000}\right)$$

i si prenem el límit:

$$V = \lim_{M\to+\infty} \pi\int_1^M \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{M\to+\infty} \pi\left(-\frac{1}{M}+1\right) = \pi$$

Comprovem que el volum buscat és finit i val π.

A7

L'àrea ombrejada d'intersecció de les dues funcions és la que volem calcular (figura 3s).

Per a trobar on es tallen les funcions, busquem els punts de tall d'ambdues, és a dir, els punts x que verifiquen la igualtat $f(x) = g(x)$, això és:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

Les dues corbes es tallen en $x = 0$ i en $x = 1$.

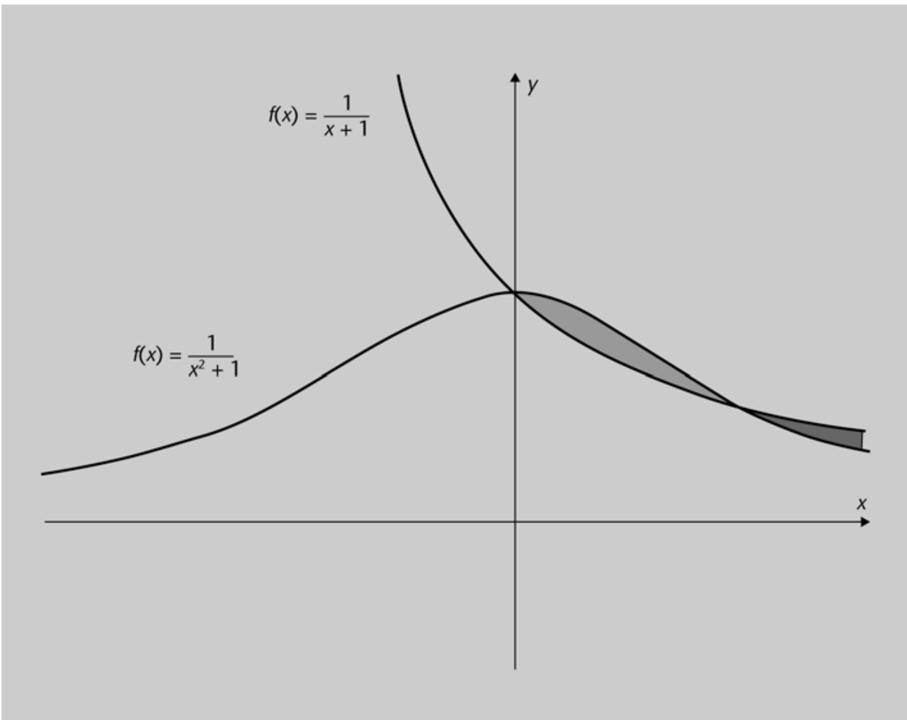


Figura 3s. Representació esquemàtica de les dues funcions f i g

A8

Per a calcular l'àrea, hem de veure què passa en l'interval $[0,+\infty[$. Observem que en l'interval

$$[0,1[\ ,\ \ f(x) < g(x)$$

i que en l'interval

$$[1,+\infty[\ ,\ \ f(x) > g(x)$$

És important l'anàlisi anterior perquè si escrivim i calculem sense més ni més:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

el resultat seria incorrecte, atès que segons l'interval d'integració elegit l'integrand pot ser positiu o negatiu.

Per tant, en el segon interval d'integració invertim l'ordre de la resta de l'integrand perquè el resultat (l'àrea) sigui positiu en les dues integrals:

$$A = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x + \int_1^\infty \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \left[\arctan x - \ln(1+x)\right]_0^1 =$$

$$= \arctan 1 - \ln 2 - (\arctan 0 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

Veiem que l'àrea localitzada entre $x = 0$ i $x = 1$ és finita.

Però l'àrea entre 1 i infinit és:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \left[\ln(1+x) - \arctan x\right]_1^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\ln(1+M) - \arctan M - (\ln 2 - \arctan 1)\right] =$$

$$= +\infty - \frac{\pi}{2} - \ln 2 + \frac{\pi}{4} = +\infty$$

Com que la integral impròpia és divergent, l'àrea (total) que estàvem buscant és infinita.

A9

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^M = \lim_{M\to+\infty} -\mathrm{e}^{-M} + 1 = 1$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$\int (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\int (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -(1-x)\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + C$$

Llavors,

$$\int_1^{+\infty} (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \left[Me^{-M} - e^{-1}\right]$$

El problema és veure quant val $\lim_{M\to+\infty} M\mathrm{e}^{-M}$. Només cal aplicar-hi la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{M\to+\infty} M\mathrm{e}^{-M} = \lim_{M\to+\infty} \frac{M}{\mathrm{e}^M} = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^M} = 0$$

en què hem derivat numerador i denominador per calcular el límit.

Finalment:

$$\int_1^{+\infty} (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1}$$

A10

Per definició es té que $\int_0^{+\infty} k^2 e^{-kx} dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M k^2 e^{-kx} dx$. Noteu que si $k = 0$ aleshores la integral és zero i per tant no pot ser mai igual a 1. Per tant podem suposar que $k \neq 0$.

Calculem la integral $\int_0^M k^2 e^{-kx} dx$ que és pràcticament immediata:

$$\int_0^M k^2 e^{-kx} dx = k^2 \int_0^M e^{-kx} dx = k^2 \left(\frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^M = -k\left(e^{-kx}\right]_0^M = k\left(1 - e^{-kM}\right)$$

Calculem el valor del límit:

$$\int_0^{+\infty} k^2 e^{-kx} dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M k^2 e^{-kx} dx = \lim_{M\to\infty} k\left(1 - e^{-kM}\right)$$

Si $k < 0$ aleshores $\lim_{M\to\infty} k\left(1 - e^{-kM}\right) = +\infty$. En canvi, si $k > 0$ tenim

$$\int_0^{+\infty} k^2 e^{-kx} dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M k^2 e^{-kx} dx = \lim_{M\to\infty} k\left(1 - e^{-kM}\right) = k$$

Per tant, si la integral impròpia ha de valer 1, aleshores *k* ha de prendre el valor 1.

A11

Per definició d'integral impròpia tenim que

$$\int_1^{\infty} \frac{k}{x^3} \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{k}{x^3} \mathrm{d}x$$

i, d'altra banda,

$$\int_1^r \frac{k}{x^3} \mathrm{d}x = k\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^r = k\left(\frac{-1}{2r^2} + \frac{1}{2}\right)$$

Prenent el límit tenim que

$$\lim_{r\to+\infty} k\left(\frac{-1}{2r^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2}$$

La integral impròpia val *k*/2. Per tant, la integral és sempre convergent i val 1 quan la constant *k* val 2.

A12

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \ln x\Big|_1^M = \lim_{M\to+\infty} \ln M = +\infty$$

A13

Aquest resultat ens fa pensar que mai no tindrem prou pintura per a pintar l'interior de la trompeta de Gabriel. Hem vist, tanmateix, que el volum és finit i val π. Penseu si hi hauria alguna manera de pintar-la.